INTEGRAL LEBESGUE PADA FUNGSI TERBATAS

SKRIPSI

Diajukan Kepada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta
untuk memenuhi sebagian persyaratan guna memperoleh gelar
Sarjana Sains

Disusun Oleh :
Fauziah Dahlia Sari
06305141020

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA
2011

HALAMAN PERSETUJUAN

SKRIPSI

INTEGRAL LEBESGUE PADA FUNGSI TERBATAS

Oleh

Fauziah Dahlia Sari

NIM. 06305141020

Telah disetujui dan disyahkan oleh Dosen Pembimbing pada tanggal

10 Maret 2011

Untuk diujikan dan dipertahankan di depan Panitia penguji Tugas Akhir Skripsi

Program Studi Matematika Universitas Negeri Yogyakarta

Menyetujui,

Dosen Pembimbing

Atmini Dhoruri, MS.

NIP.19600710 198601 2001

HALAMAN PENGESAHAN

SKRIPSI

INTEGRAL LEBESGUE PADA FUNGSI TERBATAS

Oleh
Fauziah Dahlia Sari
NIM. 06305141020

Telah dipertahankan di depan Tim Penguji Skripsi Program Studi Matematika Jurusan pendidikan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Yogyakarta pada tanggal 22 Maret 2011 dan dinyatakan telah memenuhi syarat guna memperoleh gelar Sarjana Sains di bidang Matematika.

Susunan Tim Penguji

	Nama	**Tanda Tangan**	**Tanggal**
Ketua Penguji	Atmini Dhoruri, M.S	....	5-4-11
Sekertaris Penguji	Tuharto, M.Si	....	5-4-11
Penguji Utama	Dr. Hartono	....	1-4-11
Penguji Pendamping	Dr. Sugiman	....	1-4-11

Yogyakarta,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Dekan,

Dr. Ariswan
NIP. 19590914 19880903 1 003

HALAMAN PERNYATAAN

Yang bertandatangan dibawah ini

Nama	: Fauziah Dahlia Sari
NIM	: 06305141020
Program Studi	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.
Judul	: Integral Lebesgue pada Fungsi Terbatas.

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil karya saya sendiri. Sepanjang pengetahuan saya, tidak terdapat karya atau pendapat yang ditulis atau diterbitkan orang lain kecuali sebagai acuan atau kutipan dengan mengikuti tata cara penulisan karya ilmiah yang lazim. Apabila telah terbukti pernyataan ini tidak benar, sepenuhnya menjadi tanggung jawab saya dan saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan peraturan yang berlaku.

Yogyakarta, 9 Maret 2011

Yang menyatakan

Fauziah Dahlia Sari

NIM. 06305141020

Motto

Sesungguhnya sesudah kesulitan akan datang kemudahan, maka apabila kamu telah selesai (dari suatu urusan), kerjakanlah dengan sungguh - sungguh (urusan) yang lain. (Q. S. Al insyirah : 6-7).

Barang siapa yang menenmpuh jalan di dunia ini untuk mencari ilmu didalamnya, maka Allah akan memudahkan baginya jalan menuju surga (H. R Muslim).

Allah tidak membebani seseorang kecuali sesuai dengan kesanggupannya (Q.S Al baqarah : 289).

Persembahan

Karya tulis ini kupersembahkan untuk :

1. Ayah dan ibu tersayang yang selalu mendoakan, mendukung serta memberikan kasih sayangnya setulus hati kepadaku.
2. Kakakku tercinta yang selalu memberikan motivasi, mendoakan, memberikan arahan serta selalu membantuku.
3. Terima kasih kepada sahabat - sahabatku eka, dewi, mbak diah yang selalu mendoakan, membantu serta memberikan motivasi kepadaku.
4. Terima kasih kepada keluarga besarku yang selalu membantu dan mendoakan demi kebahagiaanku.
5. Terima kasih kepada teman - temanku puguh, ulul, ginanjar, tambah, neni, mita, mbak hasna, mbak lili, putra, fajar, supri, hesti, mia, resa yang telah membantuku, memberikan motivasi dan telah sabar dalam mendengarkan keluh kesahku.

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT atas nikmat, karunia, hidayah, dan petunjuk-Nya sehingga Tugas Akhir Skripsi dengan judul " Integral Lebesgue pada Fungsi Terbatas" dapat diselesaikan dengan baik. Tugas Akhir Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu persyaratan guna memperoleh gelar Sarjana Sains Program Studi Matematika, Fakultas matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Yogyakarta.

Penulisan Tugas Akhir Skripsi ini tidak lepas dari bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak, untuk itu pada kesempatan ini penulis ucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Dr. Ariswan selaku Dekan Fakultas MIPA Universitas Negeri Yogyakarta yang telah memberikan izin dalam penulisan ini.
2. Bapak Dr. Hartono selaku Ketua Jurusan pendidikan matematika Fakultas MIPA Universitas Negeri Yogyakarta.
3. Ibu Atimini Dhoruri M.S, selaku Ketua Program Studi Jurusan Pendidkan Matematika Fakultas MIPA Universitas Negeri Yogyakarta dan selaku Dosen Pembimbing yang telah meluangkan waktu untuk membimbing, memberi nasihat dan arahan dengan sabar hingga terselesaikannya skripsi.
4. Bapak Muhammad Fauzan, M.Sc.ST selaku Pembimbing Akademik penulis.

5. Seluruh Dosen Jurusan Pendidikan Matematika Fakultas MIPA Universitas Negeri Yogyakarta yang telah memberikan ilmunya kepada penulis.
6. Seluruh pihak yang telah membantu penyelesaian Tugas Akhir Skripsi ini.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa dalam penulisan Tugas Akhir Skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan, namun demikian penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi para pembaca.

Yogyakarta, Maret 2011

Penulis,

Fauziah Dahlia Sari

NIM. 06305141020

DAFTAR ISI

INTEGRAL LEBESGUE PADA FUNGSI TERBATAS

Oleh :
Fauziah Dahlia Sari
NIM. 06305141020

ABSTRAK

Penulisan skripsi ini bertujuan untuk menjelaskan integral *Lebesgue* pada fungsi terbatas, sifat-sifat serta kekonvergenannya. Misalkan f adalah fungsi sederhana dan terukur dengan representasi kanonik $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}$, $E_i = \{x \in E : f(x) = a_i\}$ saling asing dan terukur. Bilangan a_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) berbeda dan $a_i \neq 0$. Asumsikan bahwa E berukuran berhingga, maka integral *Lebesgue* dari f didefinisikan dengan $\int f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} a_i m(E_i)$. Selanjutnya integral *Lebesgue* dari f dapat ditulis $\int f$.

Misalkan f dan g adalah fungsi terukur terbatas terdefinisi pada E, dengan E berukuran berhingga, maka sifat-sifat dari integral *Lebesgue* pada fungsi terbatas sebagai berikut :

1. $\int_E a f = a \int_E f$, untuk $\forall\ a \in \Re$
2. $\int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g$.
3. Jika $f = g$ hampir dimana-mana, maka $\int_E f = \int_E g$
4. Jika $f \leq g$ hampir dimana-mana, maka $\int_E f \leq \int_E g$, oleh karena itu $|\int_E f| \leq \int_E |f|$
5. Jika $\alpha \leq f \leq \beta$ maka $\alpha m(E) \leq \int_E f \leq \beta m(E)$.
6. Jika E_1 dan E_2 adalah subset terukur saling asing dari E maka $\int_{E_1 \cup E_2} f = \int_{E_1} f + \int_{E_2} f$.

Misalkan $\{f_n\}$ adalah barisan fungsi terukur, terdefinisi pada himpunan E yang berukuran berhingga. Terdapat bilangan real M sedemikian sehingga $|f_n(x)| \leq M$, untuk semua x dan semua n. Jika barisan $\{f_n\}$ konvergen ke fungsi f maka $\int_E f_n(x)\,dx$ konvergen ke $\int_E f(x)dx$. Atau, dengan kata lain jika $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ untuk masing-masing $x \in E$, maka $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx$.

Kata kunci : Lebesgue integral of a bounded function.

BAB 1

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Teori integral merupakan cabang dari ilmu matematika yang mendasar dan bersifat analisis. Teori integral mempunyai kaitan yang sangat erat dengan cabang analisis lainnya, seperti konsep limit, konsep derivatif, kekontinuan, konsep fungsi dan lain sebagainya. Pada tahun 1789 Augustin Chaucy memperkenalkan konsep integral yang disebut integral Cauchy. Selanjutnya pada tahun 1850 integral Chaucy diperbaiki oleh Bernhard Riemann, yang dikenal dengan integral Riemann.

Teori pengintegrasian Riemann sangat bermanfaat dalam menyelesaikan beberapa masalah matematika. Tetapi teori tersebut mempunyai beberapa kelemahan. Kelemahan yang pertama, fungsi yang terintegral Riemann hanya terdefinisi pada interval tertutup. Sedangkan untuk fungsi yang terdefinisi pada interval terbuka, interval setengah terbuka dan sebagainya, tidak dapat terintegral Riemann. Kelemahan yang kedua, integral Riemann sangat bergantung pada kekontinuan suatu fungsi. Sehingga fungsi yang tidak kontinu tidak terintegral Riemann.

Selanjutnya Henry Lebesgue, seorang matematikawan dari Perancis mengenalkan konsep integral Lebesgue yang didasarkan pada ukuran. Integral Lebesgue sudah tidak bergantung pada kekontinuan dan fungsi yang terintegral Lebesgue tidak hanya terdefinisi pada interval tertutup. Setiap fungsi yang terintegral Lebesgue terdefinisi pada himpunan terukur. Sedangkan setiap himpunan terukur mempunyai ukuran luar Lebesgue. Diberikan koleksi *countable* J = {I/ I interval terbuka} dan himpunan $E \subset \Re$. Subkeluarga C dari keluarga F adalah

$$C = \{ J : J \text{ covers } E \} = \{ J : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \} \text{ dengan } C \neq \phi .$$

Maka ukuran luar Lebesgue E didefinisikan dengan m*(E) = inf {$l(J)$: *J cover E*}

Selanjutnya ukuran lebesgue hanya akan ditulis ukuran luar.

Sedangkan himpunan $E \subset \Re$ dikatakan terukur untuk setiap himpunan $A \subset \Re$, jika berlaku $m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$. Contoh dari himpunan terukur adalah himpunan interval (0,1). Sedangkan himpunan dari semua himpunan terukur dalam $\Re$ disebut koleksi M. Fungsi $m : M - \Re_+ = [0, \propto)$ disebut ukuran *Lebesgue*, jika untuk setiap $E \in M$, $m(E) = m^*(E)$. Ukuran Lebesgue m selanjutnya, disebut dengan ukuran saja.

Misalkan f adalah fungsi sederhana dan terukur dengan representasi kanonik $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}$, $E_i = \{x \in E : f(x) = a_i\}$ saling asing dan terukur. Bilangan a_i ($i = 1, 2, ..., n$) berbeda dan $a_i \neq 0$. Asumsikan bahwa E berukuran berhingga, maka integral *Lebesgue* dari f didefinisikan dengan $\int f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} a_i m(E_i)$.

Selanjutnya integral *Lebesgue* dari f dapat ditulis $\int f$. Fungsi dari integral Lebesgue ada dua, yaitu fungsi terbatas dan fungsi tidak terbatas. Sedangkan dalam tugas akhir ini, Penulis hanya akan membahas integral *Lebesgue* pada fungsi terbatas, sifat-sifat serta kekonvergenanya.

B. Pembatasan Masalah

Sesuai dengan perkembangan jaman, integral telah berkembang dari integral yang sederhana, integral Riemann, integral Riemann-stieltjes, integral Lebesgue, integral Henstock hingga integral yang lebih rumit. Karena keterbatasan pengetahuan, penulis hanya akan membahas Integral Lebesgue pada fungsi terbatas, sifat-sifatnya dan kekonvergenan integral Lebesgue pada fungsi terbatas.

C. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang dikemukan di atas, yang akan menjadi pokok permasalahan adalah :

a. Bagaimana pengertian integral Lebesgue pada fungsi terbatas?

b. Bagaimana sifat-sifat dari integral Lebesgue pada fungsi terbatas?

c. Bagaimana kekonvergenan integral Lebesgue pada fungsi terbatas?

D. Tujuan Penulisan

Tujuan Penulisan skripsi ini adalah

a. Menjelaskan integral Lebesgue pada fungsi terbatas.

b. Menjelaskan sifat-sifat dari integral Lebesgue pada fungsi terbatas.

c. Menjelaskan kekonvergenan integral Lebesgue pada fungsi terbatas.

E. Manfaat Penulisan

Manfaat penulisan skripsi ini adalah

a. Menambah pengetahuan penulis tentang integral Lebesgue.

b. Dapat memberikan berbagai referensi bagi para pembaca yang ingin mengkaji lebih lanjut tentang integral.

BAB II

KAJIAN TEORI

Pada bab ini akan dibahas mengenai dasar-dasar teori untuk pembahasan selanjutnya, yang meliputi himpunan, Supremum dan Infimum, Barisan di $\Re$ dan kekonvergenanya, kekontinuan fungsi, himpunan terukur, ukuran luar, ukuran Lebesgue, fungsi terukur, fungsi sederhana dan integral Riemann.

A. Himpunan

Dalam pembahasan ini akan diberikan beberapa definisi tentang himpunan, gabungan, irisan dan fungsi, yang didefinisikan sebagai berikut :

Himpunan adalah sekumpulan elemen–elemen atau unsur yang memenuhi suatu aturan keanggotaan tertentu (Bartle, 2000 : 4). Jika x anggota himpunan K, maka dinotasikan $x \in$ K. Contoh : K adalah himpunan semua huruf vokal, maka K = $\{a, i, u, e, o\}$. Sedangkan kumpulan dari himpunan disebut koleksi / keluarga himpunan. Himpunan M disebut himpunan bagian (*subset*) K, jika setiap anggota M menjadi anggota K. Himpunan bagian M dinotasikan dengan $M \subset K$. Contoh : M = $\{2, 3, 5\}$ dan K = $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ maka $M \subset K$.

Sedangkan relasi dari A ke B adalah perkawanan anggota-anggota himpunan A dan anggota himpunan B. Contoh : S =$\{1, 2, 3\}$ dan R adalah relasi > (lebih dari) antara anggota-anggota S atau relasi R dari himpunan S ke himpunan S sendiri, maka R =$\{(x,y) | x > y, \text{ dan } x, y \in S\}$, sehingga R = $\{(3,2), (3,1), (2,1)\}$.

Definisi 2.1 (Bartle dan Sherbert, 2000 : 4)

a). Gabungan (*union*) dua himpunan A dan B adalah himpunan

$A \cup B$: $=\{x: x \in A \text{ atau } x \in B\}$.

Contoh : A = {*1, 2, 3*} dan B = {*2, 4, 5*} maka $A \cup B$ ={*1, 2, 3, 4, 5*}.

b) Irisan (*intersection*) dua himpunan A dan B adalah himpunan

$A \cap B$: = $\{x: x \in A \text{ dan } x \in B\}$.

Contoh : A ={*1, 2, 4*} dan B ={*2, 4, 5*} maka $A \cap B$ ={*2, 4*}.

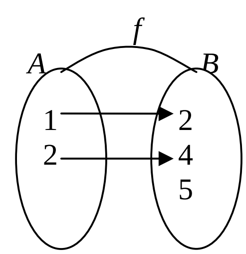
c) Komplemen himpunan B pada A adalah $A \backslash B$ atau A - B atau B^c

$A \backslash B = \{x : x \in A \text{ dan } x \notin B\}$.

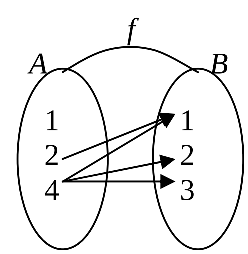
Contoh : A = {*1, 2, 3, 4*} dan B = {*1, 2*} maka $A \backslash B$ = {*3,4*}.

Definisi 2.2 (Bartle dan Sherbert, 2000 : 5)

Fungsi dari A ke B adalah relasi yang memenuhi syarat setiap anggota himpunan A mempunyai tepat satu kawan pada himpunan B. Fungsi *f* dari A ke B dinotasikan dengan f : A – B. Contoh: relasi dari A ke B, dengan A ={*1, 2*} dan B = {*2, 4, 5*}. Karena setiap anggota himpunan A mempunyai tepat satu kawan pada himpunan B, maka relasi A ke B adalah suatu fungsi.



Sedangkan untuk relasi dari C ke D, dengan C = {1, 2, 4}dan D = {1, 2, 3} bukan merupakan fungsi. Karena anggota dari C yaitu 1, tidak mempunyai kawan di D. Selain itu, anggota dari C, yaitu 2 dan 4 mempunyai kawan lebih dari satu di D.

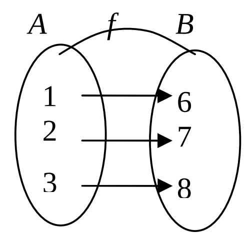


Definisi 2.3 (Bartle dan Sherbert, 2000 : 8)

Misalkan f : A – B adalah fungsi dari A ke B.

a) Fungsi f dikatakan injektif (satu-satu) jika untuk $x_1 \neq x_2$, maka $f(x_1) \neq f(x_2)$. Jika f fungsi injektif, selanjutnya dapat dikatakan bahwa f injektif.

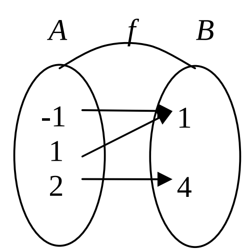
Contoh: fungsi f : A – B, dengan $f(x) = x + 5$.



Untuk $1 \neq 2$ maka $f(1) \neq f(2)$. Untuk $1 \neq 3$ maka $f(1) \neq f(3)$. Untuk $2 \neq 3$ maka $f(2) \neq f(3)$.

Jadi fungsi f adalah fungsi injektif.

b) Fungsi f dikatakan surjektif (pemetaan A onto B) jika f (A) = B dan range f (daerah hasil) sama dengan B. Jika f surjektif selanjutnya dapat dikatakan bahwa f surjektif. Contoh: fungsi f : A – B, dengan $f(x) = x^2$.

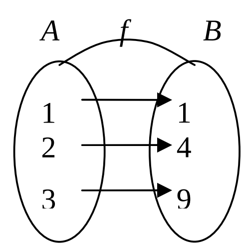


Maka $f(-1) = 1$, $f(1) = 1$ dan $f(2) = 4$.

B ={1,4} dan f (A) = B.

Jadi, f adalah fungsi surjektif.

c) Jika f surjektif dan injektif maka f dikatakan bijektif.



Contoh : fungsi f : A – B, dengan $f(x) = x^2$

Untuk $1 \neq 2$ maka $f(1) \neq f(2)$. Untuk $1 \neq 3$ maka

$f(1) \neq f(3)$. Untuk $2 \neq 3$ maka $f(2) \neq f(3)$.

Maka f adalah fungsi injetif.

$f(1) = 1$, $f(2) = 4$ dan $f(3) = 9$. Sedangkan B = {1,4, 9} dan $f(A) = B$

Maka f adalah fungsi surjektif. Karena f merupakan fungsi injektif dan surjektif, maka f adalah fungsi bijektif.

B. Supremum dan Infimum

Berikut ini akan didefinisikan batas atas, batas bawah, supremum, dan infimum suatu himpunan.

Definisi 2.4 (Bartle dan Sherbert, 2000 : 35)

Diberikan himpunan $S \subset \Re$, $S \neq \emptyset$

a) Bilangan real u disebut batas atas himpunan S jika $x \leq u$ untuk setiap $x \in S$. Jika S mempunyai batas atas maka A dikatakan terbatas ke atas.

b) Bilangan real v disebut batas bawah himpunan S jika $x \geq v$, untuk $\forall\, x \in S$.

   Jika S mempunyai batas bawah maka A dikatakan terbatas ke bawah.

c) S dikatakan terbatas jika S mempunyai batas atas dan batas bawah.

   Jika S tidak mempunyai batas atas dan batas bawah maka S tidak terbatas.

Contoh :

Buktikan bahwa $S := \{x \in \Re : 1 \le x \le 9\}$ terbatas.

Akan dibuktikan bahwa S terbatas.

Untuk setiap $x \in S$, terdapat batas atas u sedemikian sehingga $x \le u$.

Karena $1 \le x \le 9$ untuk setiap $x \in \Re$, maka $x \le 9 \le u$, sehingga $u \ge 9$ adalah batas atas dari S. Karena S mempunyai batas atas maka S terbatas atas.

Untuk setiap $x \in S$, terdapat batas bawah v sedemikian sehingga $x \ge v$.

Karena $1 \le x \le 9$ untuk setiap $x \in \Re$, maka $v \le 1 \le x$, sehingga $v \le 1$ adalah batas bawah dari S. Karena S mempunyai batas bawah maka S terbatas bawah.

S terbatas atas dan terbatas bawah maka S terbatas.

Definisi 2.5 (Bartle dan Sherbert, 2000 : 35)

Diberikan himpunan $S \subset \Re$, $S \neq \emptyset$.

a) Bilangan real M disebut batas atas terkecil (*supremum*) dari S, ditulis

   $M = sup\ (S)$, jika

   (i) $x \le M, \forall x \in S$.

   (ii) $M \le u, \forall u$ batas atas S.

b) Bilangan real m disebut batas bawah terbesar (*infimum*) dari S, ditulis

$m = inf\,(S)$, jika

(i) $x \geq m,\ \forall\, x \in S.$

(ii) $m \geq v,\ \forall\, v$ batas bawah S.

Contoh :

Diketahui $A := \{x : 0 \leq x \leq 1\}$, tentukan $sup(A)$ dan $inf\,(A)$.

Penyelesaian:

Karena $x \leq 1,\ \forall\, x \in A$ dan $1 \leq u,\ \forall\, u$ batas atas A, maka $sup\,(A) = 1$

Karena $x \geq 0,\ \forall\, x \in A$ dan $0 \geq v,\ \forall\, v$ batas bawah A, maka $inf\,(A) = 0.$

Jadi, $Sup\,(A) = 1$ dan $inf\,(A) = 0.$

C. Himpunan Tertutup dan Himpunan Terbuka

Berikut ini akan didefinisikan persekitaran, titik dalam, titik limit, himpunan terbuka, himpunan tertutup.

Definisi 2.6 (Bartle dan Sherbert: 2000 , 33)

Misalkan $c \in \Re$, dan $\varepsilon > 0$, persekitaran titik c dengan jari-jari ε didefinisikan sebagai $N_\varepsilon(c) = \{x \in \Re : |\,x - c\,| < \varepsilon\}$.

Contoh : N_ε $(2) = \{x \in \Re : | x - 2 | < \varepsilon\}$. Jadi, persekitaran titik 2 dengan jari-jari ε adalah $2 - \varepsilon < x < \varepsilon + 2$.

Titik $c \in \Re$ disebut titik dalam (*Interior point*) himpunan $A \subset \Re$ jika terdapat $\varepsilon > 0$ sehingga $N_\varepsilon(c) \subset A$. Sedangkan, titik $d \in \Re$ disebut *titik limit* himpunan $A \subset \Re$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat sedikitnya satu titik $x \in A$, dengan $x \neq d$ sedemikian sehingga $| x - d | < \varepsilon$.

Contoh:

Misalkan $A = [-2,3]$. Titik 1 adalah titik limit himpunan $A \subset \Re$, karena untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat beberapa titik $x \in A$, dengan $x \neq 1$ sedemikian sehingga

$| x - 1 | < \varepsilon$.

Himpunan $A \subset \Re$ disebut himpunan terbuka jika semua anggotanya merupakan titik dalam (*interior point*). Sedangkan himpunan $A \subset \Re$ disebut *himpunan tertutup,* jika $A^c = \Re - A$ terbuka.

Keluarga himpunan C dikatakan *cover* dari himpunan A, jika A termuat dalam gabungan himpunan yang membentuk C.

Contoh:

Diberikan keluarga himpunan C = $\{I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6\}$. Himpunan A $\subset \bigcup_{i=1}^{6} I_i$ maka keluarga himpunan C merupakan cover dari himpunan A.

D. Barisan di $\Re$ dan kekonvergenannya.

Dalam sub bab ini akan dibicarakan barisan di $\Re$ serta kekonvergenanya.

Definisi 2.7 (Bartle dan Sherbert, 2000 : 53)

Barisan bilangan real adalah fungsi terdefinisi pada N dengan range (daerah hasil) di $\Re$. Barisan ditulis $\{x_n\}$ dengan $x_n \in \Re$ atau X dengan $X \in \Re$, $\forall\, n \in N$.

Contoh: $X = \{x_n\} = (\, 2n: n \in N\,)$.

Definisi 2.8(Bartle dan Sherbert, 2000 : 54)

Barisan $X = \{x_n\}$ dikatakan konvergen ke x (atau x adalah titik limit dari x_n) jika $\forall\, \varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $K(\varepsilon)$ sedemikian sehingga untuk $n \geq K(\varepsilon)$, berlaku $|\, x_n - x| < \varepsilon$. Jika barisan mempunyai limit, maka barisan dikatakan konvergen. Jika barisan tidak mempunyai limit, maka barisan dikatakan divergen.

Barisan $\{x_n\}$ konvergen ke x, dapat ditulis $\lim_{n \to \infty} x_n = x$

Contoh :

Buktikan bahwa $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n+1} \right) = 0$.

Bukti :

Akan dibuktikan bahwa $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n+1} \right) = 0$.

Diberikan $\varepsilon > 0$, maka $\frac{1}{\varepsilon} > 0$, terdapat bilangan asli $K = K(\varepsilon)$ sedemikian sehingga

$\frac{1}{K} < \varepsilon$. Jika $n \geq K$, maka $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{K} < \varepsilon$. Sehingga

$\left|\frac{1}{n+1} - 0\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$. Terbukti bahwa $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0$.

Definisi 2.9 (Herbert S dan Narayanaswami, 1998 : 162)

Misalkan $\{a_n\}$ adalah barisan, untuk setiap $n \in N$.

Himpunan $b_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$ dan himpunan $c_n = \inf\{a_k : k \geq n\}$.

Maka limit superior dari $\{a_n\}$ dinotasikan $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ dan didefinisikan sebagai berikut $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \inf\{b_n : n \in N\}$. Sedangkan limit inferior dari $\{a_n\}$ dinotasikan $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ dan didefinisikan sebagai berikut $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \sup\{c_n : n \in N\}$.

Barisan $\{x_n\}$ dikatakan *konvergen* ke x, jika dan hanya jika $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = x$.

Contoh :

Barisan $\{a_n\} = \left(\frac{1}{n} : n \in N\right)$, buktikan bahwa $\{a_n\}$ konvergen ke 0.

Bukti :

Misalkan himpunan b_n = sup{$a_k : k \geq n$} = sup $\left\{ \frac{1}{k}, \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+3}, ... \right\}$ = $\frac{1}{k}$

Karena $k \geq n$ maka $b_n = \frac{1}{n}$. Sehingga $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$ = inf {$b_n : n \in N$ }= inf { $\frac{1}{n}$ }= 0.

Misalkan himpunan c_n = inf{$a_k : k \geq n$}= inf $\left\{ \frac{1}{k}, \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+3}, ... \right\}$ = 0.

Maka $\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n$ = sup{$c_n : n \in N$ }= sup {0} = 0.

Sehingga $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = 0$. Terbukti bahwa {$a_n$} konvergen ke 0.

Definisi 2.10 (Bartle dan Sherbert, 2000 : 60)

Barisan bilangan real $X = \{x_n\}$ dikatakan terbatas jika terdapat bilangan real $M>0$ sedemikian sehingga $|x_n| \leq M$, $\forall\, n \in N$.

Teorema 2.1 (Bartle dan Sherbert, 2000 : 60)

Barisan bilangan real yang konvergen adalah terbatas.

Bukti :

Misalkan $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ dan $\varepsilon = 1$, maka terdapat bilangan asli $K = K(1)$ sedemikian sehingga $|x_n - x| < 1$, untuk semua $n \geq K$. Dengan menggunakan pertidaksamaan segitiga, diperoleh $|x_n| = |x_n - x + x| \leq |x_n - x| + |x| < 1 + |x|$

Jika $M := sup \{ |x_1|, |x_2| , ..., |x_{k-1}|, 1 + |x| \}$. Maka $|x_n| \le M$, untuk semua $n \in N$.

Terbukti bahwa barisan bilangan real yang konvergen adalah terbatas.

Definisi 2.11 (Bartle dan sherbert, 2000 : 129)

Fungsi $f : A \to \Re$ dikatakan terbatas pada A, jika terdapat konstanta $M>0$ sedemikian sehingga $|f(x)| \le M$, untuk semua $x \in A$.

Contoh :

Fungsi $f : [1, 4] \to \Re$ dengan $f = \frac{2}{x}$ adalah fungsi terbatas, karena terdapat konstanta pada $M > 0$ sedemikian sehingga $|f(x)| \le M$, untuk semua $x \in [1, 4]$.

Definisi 2.12 (Royden, 1963)

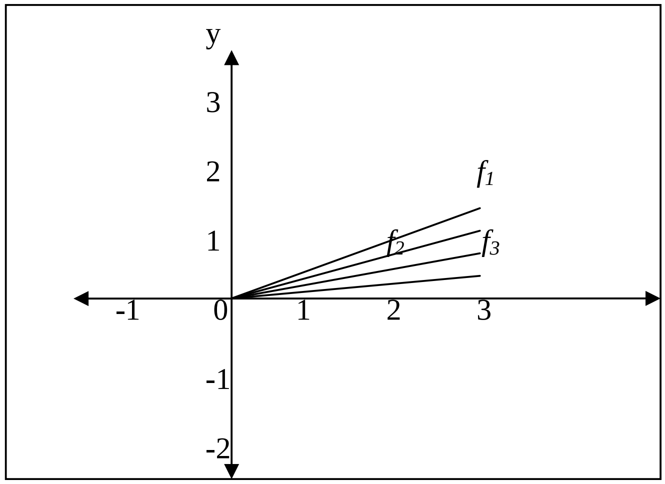
Barisan fungsi $\{ f_n \}$, terdefinisi pada A dikatakan *konvergen di setiap titik* pada A ke fungsi f, jika untuk $\forall x \in A$ berlaku $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Contoh :

$f_n : [0,3] \to \Re$. Buktikan bahwa barisan fungsi $\{ f_n \} = \frac{x}{n-1}$ konvergen di setiap titik pada [0,3] ke fungsi $f(x) = 0$.

Bukti:

Gambar dari barisan fungsi { f_n}= $\dfrac{x}{n+1}$ adalah sebagai berikut



Akan dibuktikan bahwa { $f_n(x)$} konvergen di setiap titik pada [0,3] ke fungsi

$f(x) = 0$.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n+1} = x \,.\, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = x\,.0 = 0.$$

Jadi { $f_n(x)$} konvergen di setiap titik pada [0,3] ke fungsi $f(x) = 0$, $\forall\ x \in \Re$

Definisi 2.13 (Royden, 1963)

Barisan fungsi { f_n }, terdefinisi pada A dikatakan konvergen seragam (*uniformly convergent*) pada A ke fungsi f, jika untuk $\forall\ \varepsilon > 0$ terdapat bilangan bulat N, sedemikian sehingga untuk $\forall\ x \in A$ dan $\forall\ n \geq N$, berlaku $| f_n(x) - f(x) | < \varepsilon$.

Contoh :

Diketahui $f_n : [0,1] - \Re$

$f_n(x) = \dfrac{x}{2n}$ dengan $n = 1, 2, \ldots$. Buktikan bahwa $f_n(x)$ konvergen seragam ke fungsi $f(x) = 0$ pada $[0,1]$.

Bukti :

Akan di buktikan bahwa $f_n(x)$ konvergen seragam ke fungsi $f(x) = 0$ pada $[0,1]$.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{2n} = 0.$$

Untuk $\forall\ \varepsilon > 0$ maka $\dfrac{1}{\varepsilon} > 0$, terdapat bilangan bulat 1 sedemikian sehingga $1 < \varepsilon$.

Jika $n \geq 1$ maka $\dfrac{1}{n} \leq 1 < \varepsilon$ sehingga berlaku

$$\left| \frac{x}{2n} - 0 \right| = \left| \frac{x}{2n} \right| < \frac{1}{n} < 1 < \varepsilon .$$

Terbukti bahwa $f_n(x)$ konvergen seragam ke fungsi $f(x) = 0$ pada $[0,1]$.

E. Kekontinuan Fungsi

Pada bagian ini akan dibicarakan pengertian fungsi kontinu dan sifat-sifat fungsi kontinu.

Definisi 2.14 (Purcell dan Varberg, 2001: 115)

Andaikan fungsi f terdefinisi pada (a,b) yang mengandung c. Fungsi f kontinu di c jika $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. Jika f tidak kontinu di c, maka f dikatakan tidak kontinu.

Contoh :

Buktikan bahwa $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$, $x \neq 1$ kontinu di titik $x = 3$

Akan dibuktikan bahwa $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$.

1) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 3} \dfrac{(x-1)(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x\to 3} x+1 = 3+1 = 4.$

2) $f(3) = \dfrac{3^2-1}{3-1} = \dfrac{8}{2} = 4.$

Karena $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-1}{x-1} = f(3)$ maka f kontinu di titik $x = 3$.

Teorema 2.2 (Purcell dan Varberg, 2001 : 116)

Andaikan fungsi f dan g terdefinisi pada selang terbuka yang mengandung c.

Jika fungsi-fungsi f, g kontinu di c, maka fungsi–fungsi $f + g$, $f \,.\, g$, kf, f/g (dengan $g(c) \neq 0$), f^n dengan n bilangan bulat positif, $\sqrt[n]{f}$ (dengan $f(c) > 0$ jika n genap) juga kontinu di c.

Bukti :

Fungsi f dan g terdefinisi pada selang terbuka yang mengandung c.

Fungsi f dan g kontinu di c maka $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$ dan $\lim\limits_{x\to c} g(x) = g(c)$, sehingga

a) $\lim\limits_{x\to c}(f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to c} f(x) + \lim\limits_{x\to c} g(x) = f(c) + g(c).$

b) $\lim\limits_{x\to c}(f(x).g(x)) = \lim\limits_{x\to c} f(x).\lim\limits_{x\to c} g(x) = f(c) \,.\, g(c).$

c) $\lim\limits_{n\to c}(kf(x)) = k\lim\limits_{x\to c} f(x) = k \,.\, f(c)$, dengan k adalah konstanta .

d) $\lim\limits_{x\to c}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)} = \dfrac{f(c)}{g(c)}$, dengan $g(c) \neq 0$.

e) $\lim\limits_{x\to c}(f(x))^n = (\lim\limits_{x\to c} f(x))^n = [f(c)]^n$, dengan n bilangan bulat positif.

f) $\lim\limits_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to c} f(x)}$, dengan $\lim\limits_{x\to c} f(x) > 0$ dan n bilangan bulat positif genap.

F. Ukuran Luar

Sebelum membahas ukuran luar, akan dibahas mengenai koleksi, aljabar himpunan, aljabar _*c* , dan panjang interval.

Koleksi A adalah himpunan yang beranggotakan himpunan-himpunan, sehingga A = $\{A : A \subseteq X\}$, untuk $X \neq \phi$. Menurut Royden, Koleksi

A = $\{A : A \subseteq X\}$ disebut aljabar himpunan atau *aljabar Boolean* jika

1. $A \cup B \in$ A, untuk $\forall$ $A, B \in$ A
2. $A^c \in$ A, untuk $\forall$ $A \in$ A.
3. $A \cap B \in$ A, untuk $A, B \in$ A.

Sedangkan, koleksi A = $\{A : A \subseteq X\}$ disebut aljabar_*c* jika

1. $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in$ A, untuk $\forall$ $A_i \in$ A
2. $A^c \in$ A, untuk $\forall$ $A \in$ A.

Di bawah ini, akan dibahas mengenai panjang interval dan ukuran luar.

Diberikan interval terbatas I $\subseteq \Re$ dengan titik-titik ujungnya a dan b sehingga a∶ b. Panjang interval l, ditulis l (I).

l(I) = b - a.

Contoh :

Diketahui interval I = ($0,1$), maka panjang interval l(I) = 1- 0 = 1.

Definisi 2.15 (Gupta, 1976 : 55)

Diberikan koleksi *countable* J = {I/ I interval terbuka} dan himpunan $E \subset \Re$.

Subkeluarga C dari keluarga F

$$C = \{\ J : J \textit{ covers } E\ \} = \{\ J : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\ \} \text{ dengan } C \neq \phi\ .$$

Maka ukuran luar Lebesgue E didefinisikan dengan m*(E) = inf {$l(J)$: *J cover E*}

Selanjutnya ukuran lebesgue hanya akan ditulis ukuran luar.

Contoh :

Himpunan E = [1,5]. Maka terdapat subkeluarga

C = { J : *J covers E* } = { $J : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ }.

Misalkan J_1 = {I_{11}, I_{12}, I_{13}, I_{14}, ...} dengan $I_{11} = (\ 1 - \frac{1}{1},\ 5 + \frac{1}{1}\ )$, $I_{1i} = \phi$, $\forall$ i$\geq$2

sedemikian sehingga $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_{1i}$. Maka $l(J_1) = \sum_{i=1}^{\infty} l(I_{1i})$ = 6 + 0 + 0 + ... = 6.

J_2 = {I_{21}, I_{22}, I_{23}, I_{24}, ...} dengan $I_{21} = (\ 1 - \frac{1}{2},\ 5 + \frac{1}{2})$, $I_{2i} = \phi$, $\forall\ i\ \geq 2$

sedemikian sehingga E . Maka $l(J_2) = \sum_{i=1}^{\infty} l(I_{2i})$ = 5 + 0 + 0 + ... = 5.

J_3 = {I_{31}, I_{32}, I_{33}, I_{34}, ...}dengan $I_{31} = (\ 1 - \frac{1}{3},\ 5 + \frac{1}{3})$, $I_{3i} = \phi$, $\forall\ i \geq 2$

sedemikian sehingga $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_{3i}$. Maka $l(J_3) = \sum_{i=1}^{\infty} l(I_{3i}) = 4\frac{2}{3}$ + 0 + 0 + ... = $4\frac{2}{3}$.

Dan seterusnya masih banyak lagi J_n , sehingga dapat dituliskan untuk setiap $n \in N$, J_n = {I_{n1}, I_{n2}, I_{n3}, I_{n4}, ...} dengan $I_{n1} = (1 - \frac{1}{n}, 5 + \frac{1}{n})$,

untuk setiap $i = 1$ dan $I_{ni} = \phi$, $\forall\ i \geq 2$, sedemikian sehingga $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_{ni}$.

Maka $l(J_n) = \sum_{i=1}^{\infty} l(I_{ni}) = 4\frac{2}{n} + 0 + 0 + 0 + 0 + ... = 4\frac{2}{n}$ untuk setiap $n \in N$.

Sehingga ukuran luar dari E adalah

m*(E) = inf {$l(J)$: *J cover E*}= inf {6, 5, $4\frac{2}{3}$, $4\frac{1}{2}$, $4\frac{2}{5}$, $4\frac{1}{3}$, $4\frac{2}{7}$, $4\frac{1}{4}$, ...}.

Karena barisan {6, 5, $4\frac{2}{3}$,$4\frac{1}{2}$, $4\frac{2}{5}$, $4\frac{1}{3}$, $4\frac{2}{7}$, $4\frac{1}{4}$, ...}semakin ke kanan semakin kecil dan semakin mendekati 4, maka

m*(E) = inf {$l(J)$: *J cover E*}= inf {6, 5, $4\frac{2}{3}$, $4\frac{1}{2}$, $4\frac{2}{5}$, $4\frac{1}{3}$, $4\frac{2}{7}$, $4\frac{1}{4}$ ....} = 4.

Sifat-sifat yang berkaitan dengan ukuran luar dinyatakan sebagai berikut.

Teorema 2.3 (Gupta, 1976 : 56)

Diberikan himpunan $A, B \subset \Re$.

a) m*(A) $\geq$ 0, untuk semua himpunan A.

b) m*(ϕ) = 0.

c) Jika diberikan himpunan A dan B dengan $A \subset B$, maka m*(A) $\leq$ m*(B).

d) m*(A) = 0, untuk setiap himpunan A singleton.

e) Fungsi m* bersifat translasi invarian artinya m*($A + x$) = m*(A) untuk setiap himpunan A dan $x \in \Re$.

Bukti:

Diberikan himpunan *countable* J = {I/ I interval terbuka yang saling asing} dan himpunan $A \subset \Re$. *Subfamily* C dari keluarga F adalah

$$C = \{ J : J \text{ covers } A \} = \{ J : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \} \text{ dengan } C \neq \emptyset .$$

a) Setiap $l(I_{ni}) \geq 0$, sehingga $l(J_n) \geq 0$, untuk setiap $n \in N$ dan $i=1,2,3...$,

Sehingga $m^*(A) = \text{Inf } \{ l(J) : J \text{ cover } A \} = \inf\{ \sum_{i=1}^{\infty} l(I_{ni}) \} \geq 0$.

b). Karena $\emptyset$ adalah interval yang tidak mempunyai anggota, maka

untuk setiap $l(I_{ni}) = 0$, maka $l(J_n) = 0$, untuk setiap $n \in N$.

Sehingga $m^*(\emptyset) = \inf \{ l(J) : J \text{ cover } A \} = \inf \{ \sum_{i=1}^{\infty} l(I_{ni}) \} = 0$.

Terbukti bahwa $m^*(\emptyset) = 0$

c). Karena $A \subset B$ maka $m^*(A) = \inf \{ l(J) : J \text{ cover } A \subset B \}$.

$$m^*(B) = \inf \{ l(J) : J \text{ cover } B \}.$$

Karena $l(J_n) \geq 0$, maka $\inf \{ l(J) : J \text{ cover } A \subset B \} \leq \inf \inf \{ l(J) : J \text{ cover } B \}$.

$$m^*(A) \leq m^*(B)$$

Terbukti $A \subset B$, maka $m^*(A) \leq m^*(B)$.

d). Misalkan $A = \{x\}$ himpunan singleton. untuk setiap $n \in N$, $J_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ dengan

$I_i = (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$, untuk $i = 1$ dan $I_i = \emptyset$, $\forall\, i \geq 2$.

Sehingga $l(J_n) = \frac{2}{n}$, untuk setiap $n \in N$.

Maka m*(A) = inf {*l*(*J*) : *J cover A* }= inf {2, 1, $\frac{2}{3}$, ...} = 0.

Terbukti bahwa m*(A) = 0, untuk setiap himpunan A singleton.

e) Diberikan setiap interval I dengan titik ujungnya *a* dan *b*. Maka himpunan

$I + x$ mempunyai titik ujung $a + x$ dan $b + x$.

$l(I + x) = b + x - (a + x) = b - a = l(I).$

Akan ditunjukkan bahwa m*(A + x) $\leq$ m*(A).

Diberikan ε >0, terdapat koleksi terhitung{I_{ni}}dari interval terbuka sedemikian sehingga A $\subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_{ni}$, untuk setiap $n \in N$ dan berlaku

$l(J_n)$ < m*(A) + ε .

A $\subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_{ni}$ maka A + x $\subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (I_i + x)$, sehingga

m*(A + x) $\leq \sum_{i=1}^{\infty} l(I_{ni} + x) = \sum_{i=1}^{\infty} l(I_{ni})$ < m*(A) + ε , untuk setiap $n \in N$.

Karena ε >0 sebarang, diperoleh m*(A + x) $\leq$ m*(A). (1)

Akan ditunjukkan bahwa m*(A+x) $\geq$ m*(A).

Sedangkan, A= (A+x) – x, maka A $\subset$ (A + x).

{I_{ni}}adalah koleksi terhitung dari interval terbuka yang saling asing sedemikian sehingga A + x $\subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_{ni}$ maka A $\subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_{ni}$.

A $\subset$ (A+x) maka m*(A) $\leq$ m*(A+x). (2)

Dari (1) dan (2) didapatkan m*(A) = m*(A+x).

Terbukti bahwa m*(A + x) = m*(A), untuk setiap himpunan A dan $x \in \Re$.

Teorema 2.4 (Gupta, 1976 : 57)

Ukuran luar dari suatu interval adalah panjang dari interval tersebut.

Bukti :

Kasus 1: misalkan I adalah interval tertutup berhingga dengan I = [*a*,*b*] .

Untuk $\varepsilon > 0$ terdapat interval terbuka J = ($a - \frac{\varepsilon}{2}, b + \frac{\varepsilon}{2}$) yang memuat [*a*,*b*], maka

$$m^*(I) \le l\left(\left(a - \frac{\varepsilon}{2}, b + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) = b - a + \varepsilon .$$

untuk $\varepsilon > 0$ terdapat m*(I) $\le b - a = l$ (I). (1)

Akan ditunjukkan m*(I) $\ge b$-a.

diberikan $\forall\ \varepsilon > 0$ terdapat koleksi terhitung dari interval terbuka $\{I_{ni}\}$dengan

I $\subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_{ni}$ sedemikian sehingga

$$m^*(I) > \sum_{i=1}^{\infty} l(I_{ni}) - \varepsilon .$$

Sedangkan I $\subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_{ni}$ maka l(I) < $\sum_{i=1}^{\infty} l(I_{ni})$, untuk setiap $n \in N$

$$b - a < \sum_{i=1}^{\infty} l(I_{ni}) .$$

Sehingga m*(I) $\ge \sum_{i=1}^{\infty} l(I_{ni}) - \varepsilon > b - a - \varepsilon$

$$m^*(I) > b - a - \varepsilon .$$

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, maka m*(I) $\ge b - a$. (2)

Dari (1) dan (2) didapatkan m*(I) = $b - a$.

Kasus 2 : I adalah setiap interval berhingga. diberikan ε>0, terdapat interval tertutup berhingga J$\subset$I sedemikian sehingga

l(J) > I(I) - ε .

Sehingga

l(I) - ε < l(J) = m*(J) $\le$ m*(I) $\le$ l(I).

l(I) - ε < m*(I) $\le$ l(I) .

Untuk setiap ε >0 maka m*(I) = l(I).

Kasus 3 : I adalah interval tak berhingga. Diberikan bilangan real K > 0, maka terdapat interval tertutup berhingga J$\subset$I sedemikian sehingga l (J) = K.

m*(I) $\geq$ m*(J) = l(J) = K, maka m*(I) $\geq K$, untuk setiap sebarang bilangan real K >*0*. Oleh karena itu m*(I) = $\propto$ = l(I).

Jadi terbukti bahwa ukuran luar dari suatu interval adalah panjang dari interval interval tersebut.

Contoh :

Diberikan himpunan A = (1,3), maka m*(A) = 3-1 = 2.

Teorema 2.5 (Gupta, 1976 : 58)

Diberikan koleksi terhitung himpunan-himpunan $\{E_n\}$, maka

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)\,.$$

Bukti :

Jika m*(E_n) = $\propto$ untuk beberapa $n \in N$ maka pertidaksamaan trivial.

Asumsikan bahwa m*(E_n) < $\propto$, untuk masing-masing $n \in N$. Diberikan $\varepsilon > 0$, terdapat koleksi terhitung $\{I_{n,i}\}_i$ dari interval terbuka sedemikian sehingga

$E_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{n,i}$ berlaku

$$\sum_{i=1}^{\infty} l(I_{n,i}) < m^*(E_n) + 2^{-n}\varepsilon . \tag{1}$$

Karena $E_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{n,i}$ maka $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{\infty} I_{n,i}$ sehingga

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) < \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} l(I_{n,i}) . \tag{2}$$

Dari persamaan (1) dan (2) maka diperoleh

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) < \sum_{n=1}^{\infty} \left(m^*(E_n) + 2^{-n}\varepsilon\right).$$

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) < \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n) + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\varepsilon .$$

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) < \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n) + \varepsilon .$$

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, maka $m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)$.

Corollary 2.1 (Gupta, 1976 : 65)

Jika E himpunan terhitung maka m*(E) = 0.

Bukti :

Karena E himpunan terhitung , berarti E = $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$.

Diberikan $\varepsilon > 0$, maka terdapat $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ dengan $l(I_i) = 2^{-i}\varepsilon$

(i = *1, 2,…*), sehingga diperoleh

$$m^*(E) \le \sum_{i=1}^{\infty} l(I_i) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}\varepsilon = \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} .$$

Karena $\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}$ merupakan deret tidak berhingga yang konvergen, dengan rasio

r = $\frac{1}{2}$ dan bilangan pertama, $a = \frac{1}{2}$, maka

$$S_n = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1.$$

Sehingga $m^*(E) \le \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} = \varepsilon \,.\, 1 = \varepsilon$.

Karena $m^*(E) \le \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, sedangkan $m^*(E) \ge 0$, maka $m^*(E) = 0$.

G. Himpunan Terukur.

Definisi 2.16 (Gupta, 1976 : 64)

Himpunan $E \subset \Re$ dikatakan terukur *Lebesgue* jika untuk setiap himpunan $A \subset \Re$, berlaku

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c).$$

Karena $A = (A \cap E) \cup (A \cap E^c)$ dan m* bersifat *countable subadditivity* maka berlaku

$$m^*(A) \le m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c).$$

Oleh karena itu, untuk membuktikan bahwa himpunan E terukur hanya perlu dengan membuktikan bahwa $m^*(A) \ge m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$.

Untuk selanjutnya himpunan E terukur *Lebesgue* hanya ditulis dengan E terukur.

Atau, himpunan $E \subset \Re$ dikatakan *terukur Lebesgue* didefinisikan jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat himpunan terbuka O dengan $E \subset O$ dan $m^*(O-E) \leq 0$.

Contoh :

Buktikan himpunan E = [1,2] adalah himpunan terukur

Bukti :

Himpunan [1,2] terukur jika untuk setiap himpunan $A \subset \Re$, berlaku

$$m^*(A) = m^*(A \cap [1,2]) + m^*(A \cap [1,2]^c).$$

Karena $A = (A \cap [1,2]) \cup (A \cap [1,2]^c)$ dan m* bersifat *countable subadditivity* maka berlaku $m^*(A) \leq m^*(A \cap [1,2]) + m^*(A \cap [1,2]^c)$ ....(1)

Akan dibuktikan bahwa $m^*(A) \geq m^*(A \cap [1,2]) + m^*(A \cap [1,2]^c)$.

Ambil sebarang A sedemikian sehingga

$A \cap [1,2] \subseteq A$ maka $m^*(A \cap [1,2]) \leq m^*(A)$

$A \cap [1,2]^c \subseteq \emptyset$ maka $m^*(A \cap [1,2]^c) \leq m^*(\emptyset)$

Sehingga $m^*(A) + m^*(\emptyset) \geq m^*(A \cap [1,2]) + m^*(A \cap [1,2]^c)$.

$m^*(A) + 0 \geq m^*(A \cap [1,2]) + m^*(A \cap [1,2]^c)$.

$m^*(A) \geq m^*(A \cap [1,2]) + m^*(A \cap [1,2]^c)$ ....(2)

Ambil sebarang A sedemikian sehingga

$A \cap [1,2] \subseteq \emptyset$ maka $m^*(A \cap [1,2]) \leq m^*(\emptyset)$

$A \cap [1,2]^c \subseteq A$ maka $m^*(A \cap [1,2]^c) \leq m^*(A)$

Sehingga $m^*(\emptyset) + m^*(\emptyset) \geq m^*(A \cap [1,2]) + m^*(A \cap [1,2]^c)$.

$0 + m^*(A) \geq m^*(A \cap [1,2]) + m^*(A \cap [1,2]^c)$.

$m^*(A) \geq m^*(A \cap [1,2]) + m^*(A \cap [1,2]^c)$ ....(3)

Dari (1), (2) dan (3) dapat disimpulkan bahwa E terukur.

Di bawah ini akan diberikan beberapa sifat himpunan terukur

Teorema 2.6 (Gupta, 1976 : 65)

a) Jika E terukur maka E^c juga terukur.

b) $\emptyset$ dan $\Re$ merupakan himpunan terukur.

Bukti

a) E terukur, maka $\forall\ A \subset \Re$ berlaku $m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$

$$= m^*(A \cap (E^c)^c) + m^*(A \cap E^c)$$

$$= m^*(A \cap E^c) + m^*(A \cap (E^c)^c)$$

Terbukti bahwa E^c terukur.

b) Akan dibuktikan $\emptyset$ terukur

Ambil sebarang $A \subset \Re$.

Karena $(A \cap \emptyset) \subset \emptyset$ maka $m^*(A \cap \emptyset) \leq m^*(\emptyset) = 0$.

Karena $(A \cap \emptyset^c) \subset A$ maka $m^*(A \cap \emptyset^c) \leq m^*(A)$.

Sehingga diperoleh $m^*(\emptyset) \geq m^*(A \cap \emptyset) + m^*(A \cap \emptyset^c)$. Jadi $\emptyset$ terukur.

Akan dibuktikan $\Re$ terukur.

$\emptyset$ terukur, maka untuk $\emptyset \subset \Re$ berlaku

$m^*(A) = m^*(A \cap \emptyset) + m^*(A \cap \emptyset^c)$.

$$= m^*(A \cap (\emptyset^c)^c) + m^*(A \cap \emptyset^c).$$

$$= m^*(A \cap \emptyset^c) + m^*(A \cap (\emptyset^c)^c).$$

$$= m^*(A \cap \Re) + m^*(A \cap \Re^c).$$

Terbukti bahwa $\Re$ terukur.

Teorema 2.7 (Gupta, 1976 : 65)

Jika $m^*(E) = 0$, maka E terukur.

Akibatnya setiap subset E terukur.

Bukti :

Ambil sebarang himpunan $A \subset \Re$.

Karena $A \cap E \subset E$ maka $m^*(A \cap E) \le m^*(E) = 0$ dan $(A \cap E^c) \subset A$ maka $m^*(A \cap E^c) \le m^*(A)$. Sehingga berlaku

$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) = m^*(E) + m^*(A) = 0 + m^*(A) = m^*(A)$

Terbukti bahwa E terukur.

Akan dibuktikan subset E terukur.

Ambil sebarang $K \subset E$

Maka $m^*(K) \le m^*(E)$. Akibatnya $m^*(K) \le 0$, jadi $m^*(K) = 0$

Menurut bukti sebelumnya, K terukur.

Teorema 2.8 (Gupta 1976 : 66)

Jika E_1 dan E_2 himpunan terukur maka $E_1 \cup E_2$ terukur.

Bukti :

Ambil sebarang himpunan $A \subset \Re$

Diketahui E_1 himpunan terukur, maka untuk setiap $A \subset \Re$ berlaku

$$m^*(A) = m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_1^c)$$

E_2 himpunan terukur, maka untuk setiap $A \subset \Re$ berlaku

$$m^*(A) = m^*(A \cap E_2) + m^*(A \cap E_2^c).$$

Karena $A = (A\cap E_2) \cup (A\cap E_2^c)$ maka

$$A\cap E_1^c = (A\cap E_2\cap E_1^c) \cup (A\cap E_2^c\cap E_1^c)$$

$$A\cap E_1^c = ([A\cap E_1^c]\cap E_2) \cup ([A\cap E_1^c]\cap E_2^c)$$

E_2 himpunan terukur maka untuk setiap $(A\cap E_1^c)\subset \Re$ berlaku

$$m^*(A \cap E_1^c) = m^*([A\cap E_1^c]\cap E_2) + m^*([A\cap E_1^c]\cap E_2^c).$$

Akan dibuktikan bahwa $E_1 \cup E_2$ terukur

$E_1\cup E_2$ terukur, jika untuk setiap $A\subset \Re$ berlaku

$$m^*(A) = m^*(A\cap [E_1\cup E_2]) + m^*(A\cap [E_1\cup E_2]^c)$$

Karena $A= (A\cap [E_1\cup E_2]) \cup (A\cap [E_1\cup E_2]^c)$ bersifat *countable subbadditivity* maka berlaku

$$m^*(A) \le m^*(A\cap [E_1\cup E_2]) + m^*(A\cap [E_1\cup E_2]^c) \tag{1}$$

Sehingga tinggal membuktikan

$$m^*(A) \ge m^*(A\cap [E_1\cup E_2]) + m^*(A\cap [E_1\cup E_2]^c).$$

Sedangkan $A\cap [E_1\cup E_2] = (A\cap E_1) \cup (A\cap E_2)$

$$= (A\cap E_1) \cup (A\cap E_2) \cup (E_1\cap E_1^c)$$

$$= (A\cap E_1\cup E_1) \cup ((A\cap E_2\cap E_1^c)$$

Sesuai dengan teorema 2.5 maka

$m^*(A\cap [E_1\cup E_2]) \le m^*(A\cap E_1) + m^*(A\cap E_2 \cup E_1^c).$

Jika kedua ruas ditambahkan dengan $m^*(A\cap [E_1\cup E_2]^c)$, maka

$m^*(A\cap [E_1\cup E_2]) + m^*(A\cap [E_1\cup E_2]^c) \le$

$$m^*(A\cap E_1) + m^*(A\cap E_2 \cap E_1^c) + m^*(A\cap [E_1\cup E_2]^c).$$

$$= m^*(A\cap E_1) + m^*((A\cap E_1^c)\cap E_2)+ m^*(A\cap [E_1^c\cap E_2^c]).$$

$= m^*(A \cap E_1) + m^*((A \cap E_1^c) \cap E_2) + m^*((A \cap E_1^c) \cap E_2^c)$.

$= m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_1^c)$

$= m^*(A)$

Sehingga $m^*(A \cap [E_1 \cup E_2]) + m^*(A \cap [E_1 \cup E_2]^c) \geq m^*(A)$ (2)

Dari (1) dan (2) maka diperoleh

$m^*(A) = m^*(A \cap [E_1 \cup E_2]) + m^*(A \cap [E_1 \cup E_2]^c)$.

Jadi $E_1 \cup E_2$ terukur .

Teorema 2.9 (Gupta : 67)

Jika $E_1, E_2, \ldots, E_n \subset \Re$ adalah himpunan-himpunan terukur *Lebesgue* yang saling asing, maka untuk setiap $A \subset \Re$ berlaku

$$m^*\left(A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right]\right) = \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i)$$

Bukti :

Pembuktian dilakukan dengan induksi matematika sebagai berikut

Untuk n =1, maka $m^*(A \cap E_1) = m^*(A \cap E_1)$

Andaikan benar untuk $n-1$ maka berlaku

$$m^*\left(A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\right]\right) = \sum_{i=1}^{n-1} m^*(A \cap E_i)$$

Selanjutnya akan dibuktikan benar untuk n.

Karena $E_1, E_2, \ldots, E_n$ saling asing maka

$$m^*\left(A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\right]\right) + m^*(A \cap E_n) = \left(\sum_{i=1}^{n-1} m^*(A \cap E_i)\right) + m^*(A \cap E_n)$$

$$m^*\left(A\cap\left[\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right]\cap E_n\right) + m^*\left(A\cap\left[\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right]\cap E_n^c\right) = \sum_{i=1}^{n} m^*(A\cap E_i)$$

$$m^*\left(A\cap\left[\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right]\right) = \sum_{i=1}^{n} m^*(A\cap E_i)$$

Terbukti bahwa $m^*\left(A\cap\left[\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right]\right) = \sum_{i=1}^{n} m^*(A\cap E_i)$.

Definisi 2.17 (Gupta : 1976, 60)

Himpunan dari gabungan himpunan tertutup terhitung (berhingga atau tidak berhingga) disebut dengan himpunan $\Im_\sigma$

Definisi 2.18 (Gupta : 1976 , 61)

Himpunan dari irisan himpunan terbuka terhitung adalah himpunan G_δ.

Komplemen dari himpunan G_δ adalah himpunan $\Im_\sigma$ dan berlaku sebaliknya.

Teorema 2.10(Gupta : 1976, 61)

Diberikan E himpunan terukur, maka

a). $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists$ himpunan terbuka O, dengan $E \subset O$ sedemikian sehingga

$m^*(O) < m^*(E) + \varepsilon$. Oleh karena itu $m^*(E) = \inf m^*(O)$.

b). $\exists$ himpunan G_δ, dengan $E \subset G$ sedemikian sehingga $m^*(E) = m^*(G)$

Bukti :

a) Terdapat koleksi terhitung dari interval terbuka $\{I_n\}$ sedemikian sehingga

$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) < m^*(E) + \varepsilon$.

Himpunan O = $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Maka O adalah himpunan terbuka dan

m*(O) = m*$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) < m^*(E) + \varepsilon$.

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, maka m*(E) = inf m*(O).

b) Ambil $\varepsilon = \frac{1}{n}$, n$\in N$. Dari (a) maka untuk setiap n $\in N$, $\exists$ himpunan terbuka

O_n , dengan E$\subset O_n$ sedemikian sehingga m*(O_n) < m*(E) + $\frac{1}{n}$.

Didefinisikan G = $\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$. Maka G adalah himpunan G_δ dan E$\subset$G.

Selanjutnya m*(E) $\leq$ m*(G) $\leq$ m*(O_n) < m(E) + $\frac{1}{n}$, dengan n $\in N$.

Untuk $n \to \infty$, maka m*(G) = m*(E).

Corollary 2.2 (Gupta : 1976, 74).

Masing-masing dari himpunan di $\Re$, yaitu himpunan terbuka, himpunan tertutup , himpunan $\Im_\sigma$ dan himpunan G_δ adalah terukur.

Bukti :

1. Akan dibuktikan setiap himpunan terbuka adalah himpunan terukur.

   Misalkan himpunan E adalah himpunan terbuka maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat himpunan terbuka O dengan E$\subset$O dan m*(O-E) $\leq$ 0.

   Terbukti bahwa setiap himpunan terbuka adalah himpunan terukur.

2. Akan dibuktikan bahwa setiap himpunan terbuka adalah himpunan terukur.

Misalkan F adalah himpunan tertutup, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat himpunan terbuka O dengan $F \subset O$ dan m*(O-F) $\leq$ 0. Karena O - F adalah himpunan terbuka dan setiap himpunan terbuka adalah terukur maka F terukur.

3. Himpunan $\Im_\sigma$ adalah gabungan himpunan tertutup terhitung (berhingga atau tidak berhingga). Akan dibuktikan Himpunan $\Im_\sigma$ adalah himpunan terukur.

   Misalkan F_j adalah himpunan tertutup maka F = $\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$. Karena F_j himpunan tertutup maka F_j terukur. Sesuai dengan teorema 2.8 maka gabungan dari himpunan terukur adalah himpunan terukur, sehingga F terukur.

4. himpunan G_δ adalah irisan dari himpunan terbuka. Misalkan E_i adalah himpunan terbuka maka E = $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$. Sesuai dengan teorema 2.10 maka E terukur. Sehingga himpunan G_δ terukur.

H. Ukuran Lebesgue

Sebelum membahas tentang ukuran *Lebesgue*, akan dibahas mengenai himpunan bilangan real yang diperluas dan ukuran terlebih dahulu.

Himpunan bilangan real yang diperluas adalah gabungan himpunan semua bilangan real dengan himpunan $\{-\propto, \propto\}$. Himpunan bilangan real yang diperluas dinotasikan dengan $\Re^*$. Jadi, $\Re^* = \Re \cup \{-\propto, \propto\}$. (Gupta, 1976 : 6).

Sedangkan fungsi yang nilainya pada himpunan bilangan real yang diperluas disebut *fungsi bernilai real yang diperluas*. (Gupta, 1976 : 89)

Sedangkan fungsi *m* yang memetakan setiap himpunan E pada bilangan real yang diperluas non negatif disebut *ukuran E*. Ukuran E kemudian ditulis dengan m(E) yang memenuhi sifat-sifat di bawah ini :

1. m(E) didefinisikan untuk semua himpunan E$\in$ P ($\Re$).

   P ($\Re$) adalah koleksi dari semua subset $\Re$.

2. m(I) = *l*(I), untuk suatu interval

3. Jika $\{E_i\}$ adalah barisan dari himpunan yang saling asing maka

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)\,.$$

   Sifat tersebut dikenal dengan *countable additivity*.

4. *m(E+y) = m(E)*, dengan *y* adalah bilagan tetap.

   bilangan tetap adalah bilangan yang menyebabkan m(E+y) = m(E).

   Sifat ini dikenal dengan *translasi invariance.*

Koleksi semua himpunan terukur dalam $\Re$ dinamakan M, maka M merupakan *aljabar_c* . Diketahui fungsi m : M – $\Re_+$ = [0, $\propto$), Jika untuk setiap E$\in$ M, m(E) = m*(E) maka *m* disebut ***ukuran Lebesgue***. (Gupta,1976: 65).

Teorema 2.11 (Gupta, 1976 : 70)

Jika $\{E_i\}$ merupakan barisan himpunan terukur tidak berhingga, maka

$$\text{m}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)\,.$$

Lebih lanjut, jika $\{E_i\}$ saling asing, maka

$$\text{m}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$$

Bukti:

Ambil sebarang $A = \Re$ maka diperoleh

$$\text{m}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) \qquad \text{(i)}$$

Jika $\{E_i\}$ barisan tidak berhingga dari himpunan terukur saling asing maka

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \supseteq \bigcup_{i=1}^{n} E_i \; .$$

Akibatnya

$$\text{m}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \geq \text{m}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m(E_i) \, .$$

Jadi

$$\text{m}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} m(E_i) \; .$$

Karena ruas kiri tidak bergantung pada n, misalkan $n - \propto$ maka

$$\text{m}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) \, . \qquad \text{(ii)}$$

Dari (i) dan (ii) terbukti bahwa

$$\text{m}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) \, .$$

Teorema 2.12 (Gupta, 1976 : 75)

Jika $\{E_i\}$barisan himpunan terukur monoton turun yaitu $E_{i+1} \subseteq E_i$, i = 1, 2,... dan terdapat i dengan $m(E_i) < \propto$ maka $m\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) = \lim_{n\to\infty} m(E_n)$.

Bukti :

Misalkan p adalah bilangan bulat terkecil sedemikian sehingga $m(E_p) < \propto$. Maka $m(E_i) < \propto$, untuk semua $i \geq p$. Himpunan E = $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$ dan $F_i = E_i - E_{i+1}$, maka himpunan F_i saling asing dan $E_p - E = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$.

maka $m(E_p\text{-}E) = \sum_{i=p}^{\infty} m(F_i) = \sum_{i=p}^{\infty} m(E_i - E_{i+1})$. (1)

Sedangkan

$m(E_p) = m(E) + m(E_p - E)$ dan

$m(E_i) = m(E_{i+1}) + m(E_i - E_{i+1})$, untuk semua $i \geq p$.

Sehingga $E \subset E_p$ dan $E_{i+1} \subset E_i$.

Karena $m(E_i) < \propto$, $\forall i \geq p$ maka

$m(E_p) - m(E) = m(E_p - E)$ dan

$m(E_i) - m(E_{i+1}) = m(E_i - E_{i+1})$, $\forall i \geq p$ (2)

Dari (1) dan (2) diperoleh

$$m(E_p\text{-}E) = \sum_{i=p}^{\infty} m(E_i - E_{i+1}) .$$

$$m(E_p) - m(E) = \sum_{i=p}^{\infty} (m(E_i) - m(E_{i+1}))$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=p}^{n} (m(E_i) - m(E_{i+1}))$$

$$= \lim_{n\to\infty} (m(E_p) - m(E_n))$$

$$= m(E_p) - \lim_{n\to\infty} (m(E_n)$$

Karena $m(E_p) < \propto$ maka $m(E) = \lim_{n\to\infty} (m(E_n)$.

Teorema 2.13 (Gupta, 1976 : 75)

Diberikan E himpunan terukur, maka untuk suatu translasi E + y juga terukur dan m(E + y) = m(E)

Bukti

Ambil sebarang himpunan A, karena E terukur maka

$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$.

m* bersifat *translasi invarian* maka diperoleh

$m^*(A + y) = m^*([A \cap E] + y) + m^*([A \cap E^c] + y)$

karena $[A \cap E] + y = (A + y) \cap (E + y)$ dan $[A \cap E^c] + y = (A + y) \cap (E^c + y)$.

Maka $m^*(A + y) = m^*([A + y] \cap [E + y]) + m^*([A + y] \cap [E^c + y])$.

A adalah himpunan sebarang maka A dapat diganti dengan A - y sehingga diperoleh $m^*(A) = m^*(A \cap E + y) + m^*(A \cap E^c + y)$.

Karena $E^c + y = (E + y)^c$, maka E + y terukur.

Karena m* bersifat *translasi invarian* maka m(E +Y) = m(E).

Definisi 2.19 (Gupta, 1976 : 105)

Himpunan terukur E dikatakan berukuran nol jika m(E) = 0. Suatu sifat dikatakan berlaku hampir dimana-mana jika sifat tersebut berlaku pada E kecuali pada himpunan bagian E yang berukuran nol.

Contoh :

Fungsi f yang didefinisikan pada [1,3] dengan $f(x) = \begin{cases} 0 & jika \quad x \quad irasional \\ 3 & jika \quad x \quad rasional \end{cases}$.

Buktikan bahwa $f(x) = 0$ berlaku hampir dimana-mana pada $\Re$

Bukti :

Fungsi $f(x) = 3$ untuk $x \in Q \cap [1,3]$

Himpunan $Q \cap [1,3] \subset$ Q, sedangkan himpunan semua bilangan rasional Q adalah himpunan terhitung sehingga Q berukuran nol.

Oleh karena itu $\{x \in Q \cap [1,3] : f(x)=3\}$ adalah himpunan terukur dan terhitung maka $\{x \in Q: f(x)=3\}$ berukuran nol.

Sedangkan $f(x) = 0$ untuk $x \in Q^c \cap [1,3]$,

Himpunan $Q^c \cap [1,3] \subset [1,3]$, maka Himpunan $Q^c \cap [1,3]$ berukuran 2.

Jadi $f(x) = 0$ berlaku hampir dimana-mana kecuali pada himpunan bagian [1,3] yang berukuran nol, yaitu himpunan $\{x \in Q \cap [1,3] : f(x)=3\}$.

I. Fungsi terukur

Definisi 2.20 (Gupta, 1976 : 89).

Misalkan f adalah fungsi bernilai real yang diperluas. Fungsi f dikatakan terukur *Lebesgue* pada E, jika himpunan

$E(f > a) = \{x \in E : f(x) > a\}$ terukur untuk setiap $a \in \Re$.

Untuk selanjutnya fungsi f terukur Lebesgue hanya ditulis f terukur.

Beberapa operasi dan sifat-sifat yang berlaku pada fungsi terukur akan diberikan sebagai berikut.

Teorema 2.14 (Gupta, 1976 : 89)

Diberikan fungsi bernilai real yang diperluas f didefinisikan pada E, maka pernyataan – pernyataan dibawah ini ekuivalen :

a) untuk setiap $a \in \Re$, maka E($f > a$) terukur.

b) untuk setiap $a \in \Re$, maka E($f \geq a$) terukur.

c) untuk setiap $a \in \Re$, maka E($f < a$) terukur.

d) untuk setiap $a \in \Re$, maka E($f \leq a$) terukur.

Contoh :

Tunjukkan bahwa fungsi f didefinisikan pada [-3,3] dengan

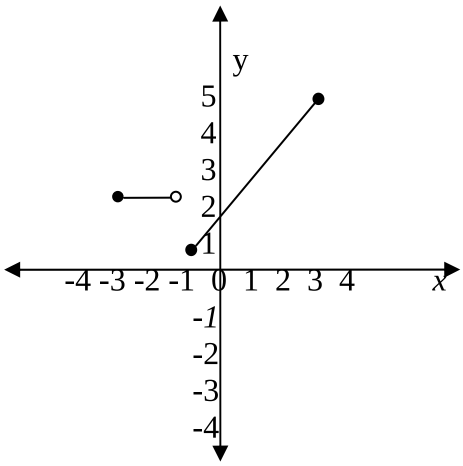
$$f\,(\mathrm{x}) = \begin{cases} 2 & jika \quad x \in [-3,-1) \\ x+2 & jika \quad x \in [-1,3] \end{cases}$$

adalah fungsi terukur.

Penyelesaian :

Untuk $x \in [-3,-1)$ maka $f(x) = 2$ dan untuk $x \in [-1,3]$ maka $f(x) = x+2$.

Sehingga gambar dari $f(x)$ di atas adalah



Gambar 1

Fungsi f dikatakan terukur *Lebesgue* pada E, jika himpunan

$E(f > a) = \{x \in E : f\,(x) > a\}$ terukur untuk setiap $a \in \Re$.

Misalkan α adalah setiap bilangan real. Maka E($f > \alpha$) adalah

$$E(f > \alpha) = \begin{cases} [-3,3] & jika \quad \alpha < 1 \\ [-3,-1) \cup (-1,3] & jika \quad \alpha = 1 \\ [-3,-1) \cup (\alpha - 2,3] & jika \quad 1 < \alpha < 2 \\ (0,3] & jika \quad \alpha = 2 \\ (\alpha - 2,3] & jika \quad \alpha > 2 \end{cases}$$

Untuk setiap α <1 maka himpunan E($f > \alpha$) = [-3,3] terukur.

Untuk setiap α = 1 maka himpunan E($f > \alpha$) = [-3,-1) $\cup$ (-1,3] terukur.

Untuk setiap 1< α <2 maka himpunan E($f > \alpha$) = [-3,-1) $\cup$ (α -2,3] terukur.

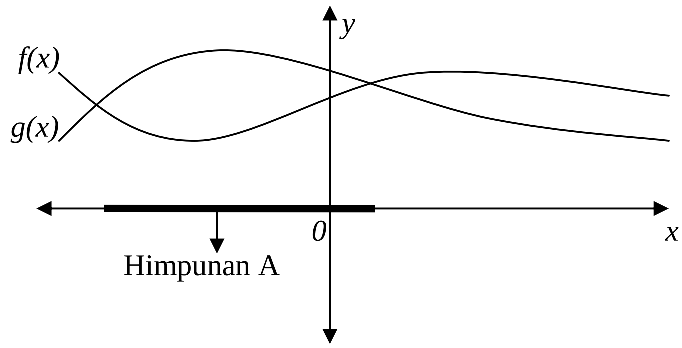
Untuk setiap α = 2 maka himpunan E($f > \alpha$) = (0,3] terukur .

Untuk setiap α > 2 maka himpunan E($f > \alpha$) = (α -2,3] terukur .

Karena himpunan $E(f > a) = \{x \in E : f(x) > a\}$ terukur untuk setiap $a \in \Re$, maka *f* adalah fungsi terukur.

Teorema 2.15 (Gupta, 1976 : 91)

a) Jika *f* fungsi terukur pada himpunan terukur E dan $E_1 \subset E$ maka *f* adalah fungsi terukur pada E_1.
b) Jika fungsi terukur *f* pada masing-masing himpunan koleksi terhitung $\{E_1\}$dalam himpunan terukur yang saling asing maka *f* terukur pada $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$
c) Jika *f* dan *g* fungsi terukur pada domain E, maka himpunan A(*f*, *g*) $=\{x \in E : f(x) < g(x)\}$ adalah terukur.



Gambar 2. himpunan $A(f, g) = \{x \in E : f(x) < g(x)\}$ adalah terukur.

Teorema 2.16 (Gupta, 1976 : 95)

Diberikan f dan g fungsi-fungsi terukur pada E dan konstanta c maka setiap fungsi di bawah ini terukur.

i) $f \pm c$

ii) cf

iii) $f + g$

iv) $f - g$

v) $|f|$

vi) f^2

vii) $f.g$

viii) f / g dengan $g(x) \neq 0$, untuk setiap $x \in E$.

Bukti

Misalkan α sebarang bilangan real.

i) Karena f terukur dan $E(f \pm c > \alpha) = E(f > \alpha \pm c)$.

Maka fungsi $f \pm c$ terukur .

ii) Untuk $c = 0$ maka E($cf > \alpha$) = E($0.f > \alpha$) = E($0 > \alpha$).

Untuk $c \neq 0$ maka

$$E(cf > \alpha) = \begin{cases} E(f > \alpha / c) & jika \quad c > 0 \\ E(f < \alpha / c) & jika \quad c < 0 \end{cases}$$

Jadi cf terukur.

iii) Himpunan E ($f + g > \alpha$) $= \{x \in E : f(x) > \alpha - g(x)\}$.

Karena g fungsi terukur, maka $\alpha - g$ terukur seperti pada *(i)* dan *(ii)*.

Oleh karena itu $f + g$ terukur .

iv) $f - g = f + (-g)$, maka E ($f + (-g) > \alpha$) $= \{x \in E : f(x) > \alpha + g(x)\}$.

Karena g fungsi terukur, maka $\alpha + g$ terukur, sehingga $f - g$ terukur.

v) $$E(|f| > \alpha) = \begin{cases} E & jika \quad \alpha < 0 \\ E(f > \alpha) \cup E(f < -\alpha) & jika \quad \alpha \geq 0 \end{cases}$$

Karena himpunan E dan E ($f > \alpha$) $\cup$ E($f < -\alpha$) terukur maka $|f|$ terukur.

vi) $$E(f^2 > \alpha) = \begin{cases} E & jika \quad \alpha < 0 \\ E(|f| > \sqrt{a}) & jika \quad \alpha \geq 0 \end{cases}$$

Karena E dan E($|f| > \alpha$) terukur maka f^2 fungsi terukur.

vii) $(f + g)^2 = f^2 + 2fg + g^2$

$\underline{(f - g)^2 = f^2 - 2fg + g^2}$ –

$(f + g)^2 - (f + g)^2 = 4fg$

$\frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f - g)^2] = fg$

Fungsi f dan g terukur maka ($f \pm g$) terukur. Sehingga $(f \pm g)^2$ dan

$[(f + g)^2 - (f - g)^2]$ terukur. Jadi $f.g = \frac{1}{4}[(f + g)^2 - (f - g)^2]$ terukur.

viii) $\frac{f}{g} = f\,\frac{1}{g}$

Akan dibuktikan bahwa *1/g* terukur pada E, dengan $g \neq 0$

$$E\left(\frac{1}{g} > \alpha\right) = \begin{cases} E(g > 0) & jika \quad \alpha = 0 \\ E(g < \frac{1}{\alpha}) \cap E(g < 0) & jika \quad \alpha > 0 \\ E(g > 0) \cup E(g < 0) \cap E(g < \frac{1}{\alpha}) & jika \quad \alpha < 0 \end{cases}$$

Karena *1/g* fungsi terukur, menurut *(vii)* maka $\frac{f}{g} = f\,\frac{1}{g}$ terukur.

Definisi 2.21 (Gupta, 1976 : 98)

Diberikan *f* bernilai real, f^+ bagian positif dari *f* dan f^- bagian negatif dari *f*. Keduanya didefinisikan sebagai fungsi non negatif dengan

$$f^+ = \max(f, 0)$$

dan

$$f^- = \max(-f, 0).$$

Sehingga $f = f^+ - f^-$ dan

$$|f| = f^+ + f^-$$

Contoh :

Fungsi $f = \sin x$, maka

$$f^+ = \max(f, 0) = \begin{cases} \sin x & untuk \quad 0 \le x < \pi \\ 0 & untuk \quad \pi \le x < 2\pi \end{cases}$$

$$f^- = \max(-f, 0) = \begin{cases} 0 & untuk \quad 0 \le x < \pi \\ -\sin x & untuk \quad \pi \le x < 2\pi \end{cases}$$

$$|f| = f^+ + f^- = \begin{cases} \sin x & untuk \quad 0 \le x < \pi \\ -\sin x & untuk \quad \pi \le x < 2\pi \end{cases}$$

Teorema 2.17 (Gupta : 1976, 99)

Diberikan { f_n } adalah barisan fungsi terukur dengan domain E, maka fungsi – fungsi $max\{f_1, f_2, \ldots f_n\}$, $min\{ f_1, f_2, \ldots f_n\}$, $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $Lim \sup_n f_n$, dan $lim \inf_n f_n$ adalah terukur.

Corollary 2.3 (Gupta : 1976, 100)

Jika $\{f_n\}$ barisan fungsi terukur yang konvergen ke f pada E, maka f adalah fungsi terukur .

Bukti :

Karena $\{f_n\}$ konvergen ke f maka $\lim_{n\to\infty} f_n = f.$

Sehingga $\underline{\lim}\, f_n = \overline{\lim}\, f_n = f$.

$= \; lim \inf_n f_n = Lim \sup_n f_n = f.$

Karena $lim \inf_n f_n$ dan $lim \sup_n f_n$ terukur maka f terukur.

Teorema 2.18 (Gupta, 1976 : 103)

Fungsi kontinu yang didefinisikan pada himpunan terukur adalah fungsi terukur.

Bukti :

A adalah fungsi yang didefinisikan pada E (terukur) dan kontinu pada E.

Misalkan α adalah sebarang bilangan real dan himpunan A = $\{x\in E \; : \; f(x) \leq \alpha \}$.

Misalkan x_0 adalah titik limit dari A, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat sedikitnya satu titik x dalam barisan $\{x_n\}$ di A dengan $x \neq x_0$ sedemikian sehingga $| x - x_0 | < \varepsilon$.

Maka terdapat titik x_0 dari barisan $\{x_n\}$ di A sedemikian sehingga $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Karena $f(x_n) \leq \alpha$, $\forall$ n $\in$ N .

Maka $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) \leq \alpha$,

Karena himpunan A memuat semua titik limit dari A maka A tertutup. Karena A tertutup, maka A terukur sehingga fungsi f juga terukur.

Teorema 2.19 (Gupta : 1976, 104)

Jika f adalah fungsi terukur, maka $|f|$, $|f|^p$ $(p > 0)$, e^{cf}, f^+, f^- adalah fungsi terukur.

Bukti :

1. Untuk $|f|$ telah terbukti pada teorema *2.16*.
2. Himpunan E($|f|^p > \alpha$) = $\begin{cases} E & jika \quad \alpha < 0 \\ E(|f| > \sqrt[p]{\alpha}) & jika \quad \alpha \geq 0 \end{cases}$

   Karena $|f|$ terukur maka $|f|^p$ terukur.

c. Untuk $c = 0$ maka himpunan E terukur.

   Himpunan E ($e^{cf} > \alpha$) = $\begin{cases} E(f < \ln \sqrt[c]{\alpha} & jika \quad c < 0 \\ E(f > \ln \sqrt[c]{\alpha}) & jika \quad c > 0 \end{cases}$

   Jadi e^{cf} terukur.

d. Karena $|f| = f^+ + f^-$ dan $f = f^+ - f^-$ maka $\frac{|f| - f}{2} = f^-$ dan $\frac{|f| - f}{2} = f^+$

   Karena $|f|$ dan f terukur maka $\frac{|f| - f}{2}$ terukur. Jadi f^- terukur.

   Karena $|f|$ dan f terukur maka $\frac{|f| + f}{2}$ terukur. Jadi f^+ terukur.

Teorema 2.20 (Gupta, 1976 :106)

Diketahui f dan g adalah fungsi-fungsi yang didefinisikan pada himpunan terukur E sehingga $f = g$ hampir dimana-mana pada E. Jika g terukur maka f terukur.

Bukti :

Misalkan $E_1 = \{x \in E : f(x) = g(x)\}$ dan $E_1^{\,c} = \{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$ maka

$E = E_1 \cup E_1^c$ dan $m(E_1^c) = 0$. Misalkan α adalah sebarang bilangan real dan

$$A = \{x \in E : f(x) > \alpha\}$$

Karena $A \cap E_1^c \subset E_1^c$, maka $m^*(A \cap E_1^c) = 0$ dan

$$\begin{aligned} A \cap E_1 &= \{x \in E : f(x) > \alpha\} \cap \{x \in E : f(x) = g(x)\} \\ &= \{x \in E : f(x) = g(x) > \alpha\}. \end{aligned}$$

Karena $g(x)$ terukur maka $A \cap E_1$ terukur, sehingga

$m^*(A) = m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_1^c)$. Jadi f terukur.

Teorema 2.21 (Gupta, 1976 :107)

Jika fungsi f didefinisikan pada himpunan terukur E dan kontinu hampir dimana-mana pada E, maka f terukur pada E.

Definisi 2.22 (Gupta, 1976 : 107)

Barisan fungsi $\{f_n\}$ terdefinisi pada E dikatakan *konvergen hampir dimana-mana* ke fungsi f jika

$\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$, untuk setiap $x \in E - E_1$ dengan $E_1 \subset E$ dan $m(E_1 = 0)$.

Teorema 2.22 (Gupta, 1976: 107)

Jika barisan fungsi terukur $\{f_n\}$ konvergen hampir dimana-mana ke fungsi f, maka f terukur.

Bukti :

Barisan $\{f_n\}$ konvergen hampir dimana-mana ke fungsi f pada E, maka $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, Untuk setiap $x \in E - E_1$ dengan $E_1 \subset E$ dan m(E_1 = 0).

Sehingga $\underline{\lim}\, f_n(x) = \overline{\lim}\, f_n(x) = f(x)$, $\forall\, x \in E - E_1$ dengan $E_1 \subset E$ dan m(E_1 = 0).

$= \ lim \inf_n f_n(x) = Lim \sup_n f_n(x) = f(x).$

Karena $lim \inf_n f_n$ dan $Lim \sup_n f_n$ terukur maka f terukur.

Definisi 2.23 (Gupta, 1976 : 118)

Barisan fungsi terukur $\{f_n\}$ dikatakan konvergen pada ukuran ke fungsi f pada E, ditulis $f_n \xrightarrow{m} f$, jika untuk setiap $\delta > 0$ dan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan bulat positif N sedemikian sehingga $m(\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) < \delta$, untuk setiap n > N.

Definisi 2.24 (Gupta, 1976: 118)

Barisan fungsi terukur $\{f_n\}$ dikatakan *konvergen pada ukuran* ke fungsi terukur f pada E, jika $\lim_{n\to\infty} m(\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$, untuk setiap $\varepsilon > 0$.

Teorema 2.23 (Gupta, 1976 : 119)

Misalkan { f_n} adalah barisan fungsi terukur yang konvergen ke fungsi *f* hampir dimana-mana pada *E*. Maka {f_n} *konvergen pada ukuran* ke fungsi terukur *f.*

Bukti :

Untuk setiap bilangan asli n dan $\varepsilon > 0$, himpunan

$S_n(\varepsilon) = \{x \in E : | f_n(x) - f(x) | \geq \varepsilon\}$

Misalkan ϵ >0 adalah bilangan sebarang, maka terdapat bilangan terukur $A \subset E$ dengan m(A) < ϵ dan bilangan bulat positif N sedemikian sehingga

$| f_n(x) – f(x) | < \varepsilon$.

Untuk semua $x \in E\text{-}A$ dan n $\geq$ N, maka $S_n(\varepsilon) \subset A$, untuk setiap n > N.

$m(S_n(\varepsilon)) \leq m(A) < \epsilon$, untuk setiap n > N. Jadi {f_n} konvergen pada ukuran ke *f.*

Definisi 2.25 (Gupta, 1976 : 94)

Fungsi $f : [a,b] \to \Re$ disebut fungsi tangga jika terdapat partisi

$\{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\} \subseteq [a, b]$

sehingga untuk setiap subinterval (x_{i-1}, x_i), fungsi f bernilai konstan

$f(x) = c_i$, $\quad \forall x \in (x_{i-1}, x_i)$, dengan $i = 1, 2, \ldots, n.$

Contoh :

Fungsi $f : [2,6] \to \Re$ dengan $f(x) = \begin{cases} 5 & jika \quad 2 \leq x < 4 \\ 3 & jika \quad 4 \leq x \leq 6 \end{cases}$ adalah fungsi tangga.

Definisi 2.26 (Gupta, 1976 : 100)

Misalkan E adalah himpunan terukur.

Didefinisikan fungsi karakteristik X_E pada E dengan rumus $X_E\,(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$.

Integral fungsi karakteristik X_E pada E didefinisikan sebagai $\int_E X_E$ dx = $m(E)$.

Contoh :

Tentukan $\int_E X_E\ dx$, jika himpunan $E = \{x : x \in\ Q \cap (-1,2)\}$.

Penyelesaian:

Himpunan $E = \{x : x \in\ Q \cap (-1,2)\}$

$Q \cap (-1,2) \subset Q$, sedangkan Q adalah himpunan terhitung, sehingga $m(Q) = 0$.

Oleh karena itu $m(E) = 0$. Sehingga $\int_E X_E\ dx = m(E) = 0$

Teorema 2.24 (Gupta, 1976 :100)

Diberikan $A,B \subset E$, berlaku

a) $\chi_\phi = 0$ dan $\chi_E = 1$.

b) Jika $A \subset B$ maka $\chi_A \leq \chi_B$.

c) $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$.

d) $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$.

e) Jika $\{E_i\}$ merupakan koleksi himpunan bagian E yang saling asing, maka

$$\chi_{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{E_i}$$

J. Fungsi Sederhana

Definisi 2.27 (Gupta, 1976 : 101)

Fungsi $\rho : E - \Re$ disebut dengan fungsi sederhana, jika terdapat himpunan terukur $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ yang saling asing, dengan $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = E$ dan himpunan bilangan real berhingga $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ sedemikian sehingga

$$\rho\ (x) = a_i, \qquad x \in E_i,\ 1 \leq i \leq n$$

Misalkan f adalah fungsi sederhana maka diperoleh

$$\rho\ (x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i\,(x)}$$

Dengan χ_{E_i} adalah fungsi karakteristik dari himpunan terukur E_i, dan himpunan $E_i = \{\, x \in E : \rho\,(x) = a_i \,\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ merupakan partisi dari E. Fungsi sederhana ini selalu terukur. Contoh: setiap fungsi karakteristik dari himpunan terukur adalah fungsi sederhana.

K. Integral Riemann

Definisi 2.28 (Varberg dan Purcell : 340)

Andaikan f suatu fungsi yang didefinisikan pada selang tertutup [a,b]. Jika $\lim_{|p| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i}) \Delta x_i$ ada, maka f terintegral pada [a,b]. Lebih lanjut $\int_a^b f(x)dx$ disebut integral tentu (integral Riemann) f dari a ke b. Sehingga

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|p| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i}) \Delta x_i$$

Dengan $\bar{x}_i$ adalah sebarang titik sampel untuk selang bagian ke–i. Sedangkan $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ dan |*P*| (disebut norma *P*) menyatakan panjang selang bagian yang terpanjang dari partisi *P* pada [*a*,*b*]. Karena partisi dibuat sebanyak-banyaknya maka panjang selang bagian yang terpanjang mendekati nol atau ditulis |*P*| – 0

Contoh :

Hitung $\int_{-1}^{5}(x-1)dx$

Penyelesaian :

Selang [-*1*,*5*] dibuat partisi menjadi n selang bagian yang sama, masing-masing dengan panjang $\Delta x = \frac{5-(-1)}{n} = \frac{6}{n}$. Dalam tiap selang [$x_{i-1}$, x_i] menggunakan $\bar{x}_i = x_i$ sebagai titik sampel. Maka

$x_0 = -1$

$x_1 = -1 + \Delta x = -1 + \frac{6}{n}$

:

$x_i = -1 + i\ \Delta x = -1 + i.\ \frac{6}{n}$

$x_n = -2 + i\ \Delta x = -2 + n.\ \frac{6}{n} = 4$

Jadi $f(x_i) = x_i - 1 = -1 + \frac{6i}{n} - 1 = -2 + \frac{6i}{n}$

Sehingga

$$\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n}\left[-2+\frac{6i}{n}\right]\frac{6}{n}$$

$$= -\frac{12}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{36}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i$$

$$= -\frac{12}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{36}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$= -\frac{12}{n}.n + \frac{36}{2}\left[1+\frac{1}{n}\right]$$

$$= -12 + 18 + \frac{18}{n}$$

$$= 6 + \frac{18}{n}$$

Karena P adalah suatu partisi tetap, $|P| - 0$ setara dengan n $-$ $\propto$, maka

Jadi, $\int_{-1}^{5}(x-1)dx = \lim_{|p|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\left[6+\frac{18}{n}\right] = 6.$

Misalkan ψ adalah fungsi tangga, terdefinisi pada interval tertutup [a,b] maka

ψ *(x) = c_i , $x_i < x < x_{i-1}$ (i = 1, 2, …n),*

dengan {$a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n = b$}adalah partisi dari [$a$,$b$].

Didefinisikan integral *Elementer* dari ψ pada [a,b] sebagai berikut :

$$\int_{a}^{b}\psi(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1})$$

Sehingga $R\,\bar{\int_a^b} f(x)dx = \inf\int_{a}^{b}\psi(x)\,dx$, untuk semua fungsi tangga $\psi \geq f$.

$R\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\int_a^b \psi(x)\,dx$, untuk semua fungsi tangga $\psi \leq f$.

Jika $R\overline{\int_a^b} f(x)dx = R\underline{\int_a^b} f(x)dx$, maka f terintegral Riemann pada [a,b], dan dinotasikan dengan $R\int_a^b f(x)dx$. (Gupta, 1976: 129).

Contoh:

Misalkan fungsi $f(x) = 4$ terdefinisi pada [0,3] . Tentukan $R\int_0^3 f(x)dx$.

Penyelesaian:

Untuk semua fungsi tangga $\psi \geq f$, maka

$$R\overline{\int_0^3} f(x)dx = \inf\int_0^3 \psi(x)\,dx = \inf \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1})$$

$$= 4.(3 - 0)$$

$$= 4.$$

$$= 12$$

Untuk semua fungsi tangga $\psi \leq f$, maka

$$R\underline{\int_0^3} f(x)dx = \sup\int_0^3 \psi(x)\,dx = \sup\sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1})$$

$$= 4.\,(3\text{-}0)$$

$$= 4.3$$

$$= 12$$

Karena $R\overline{\int_0^3} f(x)dx = R\underline{\int_0^3} f(x)dx$ maka f terintegral Riemann, sehingga

$R\int_0^3 f(x)dx = 12$.

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas tentang integral Lebesgue pada fungsi terbatas, keterkaitan integral Lebesgue dengan integral Riemann, sifat-sifat integral Lebesgue pada fungsi terbatas, dan kekonvergenan pada fungsi terbatas.

A Integral Lebesgue pada fungsi terbatas

Misalkan f adalah fungsi sederhana dan terukur dengan representasi kanonik $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}$, $E_i = \{x \in E : f(x) = a_i\}$ saling asing dan terukur. Bilangan a_i ($i = 1, 2, ..., n$) berbeda dan $a_i \neq 0$. Asumsikan bahwa E berukuran berhingga, maka integral *Lebesgue* dari f didefinisikan dengan

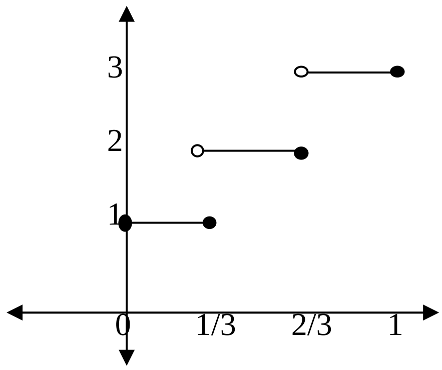
$$\int f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} a_i m(E_i) .$$

Selanjutnya integral *Lebesgue* dari f dapat ditulis $\int f$. Jika E himpunan terukur, maka $\int_E f = \int f \chi_E$. (Gupta :1976, 130).

Contoh :

Fungsi $f : [0,1] \to \Re$ yang didefinisikan dengan

$$f(x) = \begin{cases} 1 & jika \quad x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \\ 2 & jika \quad x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \\ 3 & jika \quad x \in \left(\frac{2}{3}, 1\right] \end{cases}$$



Hitunglah $\int\limits_{[0,1]} f(x)dx$

Penyelesaian :

Interval [*0,1*] dibagi menjadi $\left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \cup \left(\frac{2}{3}, 1\right]$.

$$m\left(\left[0, \frac{1}{3}\right]\right) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

$$m\left(\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$m\left(\left(\frac{2}{3}, 1\right]\right) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\int\limits_{[0,1]} f(x)dx = (1 \text{ x } \frac{1}{3}) + (2 \text{ x } \frac{1}{3}) + (3 \text{ x } \frac{1}{3}) = 2.$$

Lemma 3.1 (Gupta : 1976, 130)

Misalkan $f = \sum_{i=1}^{n} a_i x_{E_i}$ dengan setiap E_i adalah himpunan terukur berukuran berhingga dan saling asing, maka $\int f = \sum_{i=1}^{n} a_i m(E_i)$.

Bukti :

Fungsi sederhana f terdefinisi pada $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. Misalkan c_j anggota dari range f. Maka bentuk kanonik dari f adalah $f = \sum_{j=1}^{m} c_j x_{A_{C_j}}$ dengan $c_1 \neq c_2 \neq \ldots \neq c_n$ dan himpunan A_{C_j} diberikan sebagai berikut :A_{C_j} = (x: $f(x)$= c_j) = $\bigcup_{a_i = c_j} E_i$

Sehingga

$$\int f = \sum_{j=1}^{m} c_j m(A_{C_j})$$

$$= \sum_{j=1}^{m} c_j m(\bigcup_{a_i = c_j} E_i)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} c_j \sum_{a_i = c_j} m(E_i)$$

$$= \sum_{a_i = c_j} \sum_{j=1}^{m} c_j m(E_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i m(E_i).$$

Terbukti bahwa $\int f = \sum_{i=1}^{n} a_i m(E_i)$.

Teorema 3.1 (Gupta : 1976, 131)

Misalkan f dan g adalah fungsi sederhana pada himpunan terukur E berukuran berhingga, maka :

a. $\int af + bg = a\int f + b\int g$, untuk semua bilangan real a dan b.

b. Jika $f \geq g$ maka $\int f \geq \int g$

Bukti :

a. Misalkan $\{A_i\}$ dan $\{B_j\}$ adalah himpunan dalam bentuk kanonik dari f dan g.

Karena $\chi_{A_i} = \sum_{j=1}^{n} \chi_{A_i \cap B_j}$ dan $\chi_{B_j} = \sum_{j=1}^{n} \chi_{A_i \cap B_j}$ maka

$$af + bg = a\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_{A_i} + b\sum_{j=1}^{n} \beta_j x_{B_j}$$

$$= a\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i \cap B_j} + b\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \beta_j \chi_{A_i \cap B_j}$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a\alpha_i \chi_{A_i \cap B_j} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b\beta_j \chi_{A_i \cap B_j}$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (a\alpha_i + b\beta_j)\chi_{A_i \cap B_j}$$

Karena koleksi dari himpunan $A_i \cap E_j$ *(i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, .., n)* membentuk koleksi saling asing berhingga dari himpunan terukur, maka dengan lemma *3.1*, didapatkan :

$$\int (af + bg) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (a\alpha_i + b\beta_j) m(A_i \cap B_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (a\alpha_i + b\beta_j) m(A_i \cap B_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a\alpha_i .m(A_i \cap B_j) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b\beta_j .m(A_i \cap B_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a\alpha_i m(A_i \cap [\bigcup_{j=1}^{n} B_j]) + \sum_{j=1}^{n} b\beta_j m([\bigcup_{i=1}^{m} A_i] \cap B_j),$$

Karena $\begin{cases} A_i \cap [\bigcup_{j=1}^{n} B_j] = A_i & , i = 1,2,.....,m \\ [\bigcup_{i=1}^{m} A_i] \cap B_j = B_j & , j = 1,.......,n \end{cases}$

Maka $\int (af + bg) \;\; = a\sum_{i=1}^{m} \alpha_i m(A_i) + b\sum_{j=1}^{n} \beta_j m(B_j) \; = a\int \rho + b\int \psi$

Jadi, terbukti $\int af + bg = a\int f + b\int g$

b). Fungsi $f \geq g$, ambil a =1 dan b = -1 pada (a) maka didapatkan

$\int f - \int g = \int (f - g)$

Karena $f \geq g$ maka f - $g \geq 0$ adalah fungsi sederhana, maka sesuai dengan definisi integal elementer diperoleh $\int (f - g) \geq 0$. Sehingga

$\int f - \int g = \int (f - g) \geq 0$

$\int f - \int g \geq 0$

$\int f \geq \int g$.

Terbukti, jika $f \geq$ g maka $\int f \geq \int g$..

Di bawah ini akan dibahas integral *Lebesgue atas* dan integral *Lebesgue bawah* dari fungsi terbatas yang terdefinisi pada himpunan terukur berukuran berhingga.

Misalkan $f : E - \Re$ adalah fungsi terbatas dan E himpunan terukur yang berukuran berhingga. Misalkan ψ adalah fungsi sederhana terdefinisi pada E dengan $\psi \geq f$. Dan ρ adalah fungsi sederhana terdefinisi pada E dengan $\rho \leq f$. Jika dua bilangan $\inf_{\phi > f} \int_E \psi$ dan $\sup_{\rho < f} \int_E \rho$ ada, maka $\inf_{\phi > f} \int_E \psi$ disebut integral

Lebesgue atas dan $\sup\limits_{\rho<f}\int_E \rho$ disebut integral *Lebesgue bawah*. Selanjutnya integral *Lebesgue atas* ditulis dengan $\mathcal{L}\overline{\int_E} f(x)dx$ dan integral *Lebesgue bawah* ditulis dengan $\mathcal{L}\underline{\int_E} f(x)dx$.

Bukti :

Karena *f* fungsi terbatas, maka terdapat bilangan real α dan β sedemikian sehingga

$$\begin{cases} \alpha = \inf\{f(x) : x \in E\} \\ \beta = \sup\{f(x) : x \in E\} \end{cases}$$

Konstanta α dan β dipandang sebagai fungsi konstan. Fungsi konstan tersebut adalah fungsi sederhana terdefinisi pada E, sehingga berlaku $\alpha \le f \le \beta$.

Himpunan $L(f)=\{\rho: \rho$ adalah fungsi sederhana terdefinisi pada E dan $\rho \le f\}$.

Untuk setiap $\rho \in L(f)$ terdapat $\rho \le f \le \beta$, sehingga

$$\int_E \rho \le \int_E \beta = \beta m(E).$$

Himpunan $\left\{\int_E \rho : \rho \in L(f)\right\} \subset \Re$ dan bukan himpunan kosong. Karena sedikitnya terdapat *α* sebagai anggota dari himpunan $\left\{\int_E \rho : \rho \in L(f)\right\}$ dan terdapat batas atas $\beta m(E) \in \Re$. Sehingga himpunan $\left\{\int_E \rho : \rho \in L(f)\right\}$ mempunyai *supremum* yaitu $\sup\limits_{\rho<f}\int_E \rho$. Selanjutnya $\sup\limits_{\rho<f}\int_E \rho$ ditulis dengan integral *Lebesgue* bawah $\mathcal{L}\underline{\int_E} f(x)dx$.

Himpunan $U(f) = \{\psi : \psi$ adalah fungsi sederhana terdefinisi pada E, dengan $\psi \geq f\}$. Untuk setiap $\psi \in U(f)$, terdapat $\alpha \leq f \leq \beta$,

$$\alpha\, m(E) = \int_E \alpha \leq \int_E f \leq \int_E \psi .$$

Maka himpunan $\left\{ \int_E \psi : \psi \in U(f) \right\} \subset \Re$ dan bukan himpunan kosong.

Karena sedikitnya terdapat β sebagai anggota dari $\left\{ \int_E \psi : \psi \in U(f) \right\}$ dan terdapat batas bawah $\alpha m(E) \in \Re$, sehingga $\left\{ \int_E \psi : \psi \in U(f) \right\}$ mempunyai *infimum* $\inf_{\phi > f} \int_E \psi$. Selanjutnya $\inf_{\phi > f} \int_E \psi$ ditulis dengan integral *Lebesgue* atas ditulis dengan $\mathcal{L}\overline{\int_E} f(x)dx$.

Jadi, Setiap fungsi terbatas f terdefinisi pada himpunan terukur berukuran berhingga mempunyai integral *Lebessgue atas* dan integral *Lebesgue bawah*.

Teorema 3.2 (Gupta : 1976, 133)

Misalkan f: E $\to$ $\Re$ adalah fungsi sederhana. Maka

$$\mathcal{L}\underline{\int_E} f(x)dx = \int_E f = \mathcal{L}\overline{\int_E} f(x)dx$$

Bukti :

Fungsi f adalah fungsi sederhana.

Fungsi $f \in L(f)) = \{\rho : \rho$ adalah fungsi sederhana terdefinisi pada E dan $\rho \leq f\}$.

$\rho \in L(f)$ maka $\rho \leq f \leq \beta$ sehingga $\int_E \rho \leq \int_E f \leq \int_E \beta = \beta m(E)$. Oleh karena itu

himpunan $\left\{ \int_E \rho : \rho \in L(f) \right\}$ mempunyai $\sup\limits_{\rho < f} \int_E \rho$ sedemikian sehingga

$$\sup_{\rho < f} \int_E \rho = \mathcal{L} \underline{\int_E} f(x)dx \geq \int_E f . \qquad (1)$$

$f \in U(f) = \{\psi : \psi$ adalah fungsi sederhana terdefinisi pada E, dengan $\psi \geq f\}$.

$\psi \in U(f)$ maka $\alpha \leq f \leq \psi$ sehingga $\alpha\, m(E) = \int_E \alpha \leq \int_E f \leq \int_E \psi$.

Maka $\left\{ \int_E \psi : \psi \in U(f) \right\}$ mempunyai $\inf\limits_{\psi > f} \int_E \psi$ sedemikian sehingga

$$\inf_{\psi > f} \int_E \psi = \mathcal{L} \overline{\int_E} f(x)dx \leq \int_E f . \qquad (2)$$

Dari (1) dan (2) diperoleh $\int_E f \leq \mathcal{L} \underline{\int_E} f(x)dx \leq \mathcal{L} \overline{\int_E} f(x)dx \leq \int_E f$.

Terbukti bahwa $\mathcal{L} \underline{\int_E} f(x)dx = \int_E f = \mathcal{L} \overline{\int_E} f(x)dx$. Jadi, setiap fungsi sederhana

mempunyai integral *Lebesgue atas* dan Integral *Lebesgue bawah* yang sama.

Akibat dari teorema di atas adalah sebagai berikut.

Definisi 3.1 (Gupta : 1976, 133)

Misalkan f adalah fungsi terbatas terdefinisi pada himpunan E yang berukuran berhingga. Fungsi f dikatakan terintegral *Lebesgue* pada E, jika

$$\mathcal{L}\overline{\int_E} f(x)dx = \mathcal{L}\underline{\int}_E f(x)dx$$

Integral *Lebesgue* dari f pada E ditulis dengan $\mathcal{L}\int_E f(x)dx$ atau $\int_E f$.

Jadi, setiap fungsi terbatas, terdefinisi pada himpunan E berukuran berhingga jika mempunyai integral atas dan bawah yang sama, maka fungsi terintegral *Lebesgue*.

Contoh :

Fungsi $f : [0,1] \rightarrow \Re$ dengan $f(x) = 2x$. Hitunglah $\int_0^1 2xdx$

Penyelesaian:

Fungsi $f \in U(f) = \{\psi : \psi$ adalah fungsi sederhana terdefinisi pada E, dengan $\psi \geq f\}$. Fungsi $\psi \in U(f)$ maka terdapat $\inf_{\phi > f} \int_E \psi(x)dx = \mathcal{L}\overline{\int_E} f(x)dx = 1$.

Fungsi $f \in L(f)) = \{\rho: \rho$ adalah fungsi sederhana terdefinisi pada E dan $\rho \leq f\}$.

Fungsi $\rho \in L(f)$ maka terdapat $\sup_{\rho < f} \int_E \rho(x)dx = \underline{\int}_E f(x)dx = 1$.

Karena $\mathcal{L}\overline{\int_E} f(x)dx = \mathcal{L}\underline{\int}_E f(x)dx = 1$, maka $\int_0^1 2xdx = 1$

Selanjutnya akan dibuktikan setiap fungsi terukur terbatas yang didefinisikan pada himpunan berukuran berhingga akan terintegral *Lebesgue*.

Teorema 3.3 (Gupta : 1976 : 134)

Misalkan f adalah fungsi terbatas yang terdefinisi pada himpunan terukur E yang berukuran berhingga. Fungsi f terintegral *Lebesgue* jika dan hanya jika f terukur.

Bukti:

= Misalkan f terintegral *Lebesgue* atas E maka

$$\inf_{\phi > f} \int_E \psi(x)dx = \sup_{\rho < f} \int_E \rho(x)dx = h$$

Untuk setiap fungsi sederhana ψ , ρ dan sebarang bilangan real h.

Diberikan bilangan bulat n, maka terdapat himpunan sederhana ρ_n dan ψ_n sedemikian sehingga $\rho_n(x) \leq f(x) \leq \psi_n(x)$ berlaku

$$\int_E \psi_n(x)dx < h + \frac{1}{2n} \Leftrightarrow \int_E \psi_n(x)dx - \frac{1}{2n} < h$$

$$\int_E \rho_n(x)dx > h - \frac{1}{2n} \Leftrightarrow \int_E \rho_n(x)dx + \frac{1}{2n} > h$$

Maka

$$\int_E \psi_n(x)dx - \frac{1}{2n} < \int_E \rho_n(x)dx + \frac{1}{2n}$$

$$\int_E \psi_n(x)dx - \int_E \rho_n(x)dx < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}.$$

Sehingga $\int_E \psi_n(x)dx - \int_E \rho_n(x)dx < \frac{1}{n}$ (1)

Misalkan fungsi $\psi^{*} = \inf \psi_n$ dan $\rho^{*} = \sup \rho_n$. Karena untuk masing-masing n, ρ_n, dan ψ_n adalah fungsi terukur maka fungsi ρ_*, ψ_* terukur dan

$$\rho^*(x) \le f(x) \le \psi^*(x).$$

Himpunan $\Delta = \{x: \rho^*(x) < \psi^*(x)\}$.

$$\Delta_v = \{x: \rho^*(x) < \psi^*(x) - \frac{1}{v}\}.$$

$$(\Delta_{v,n}) = \{x: \rho_n(x) < \psi_n(x) - \frac{1}{v}\}.$$

Maka diperoleh:

a. $\Delta = \bigcup_{v=1}^{\infty} \Delta_v$.

b. $\Delta_v \subset \Delta_{v.n}$, $\forall n \in \mathrm{N}$

c. $m(\Delta_{v,n}) < \frac{v}{n}$. Jika $m(\Delta_{v.n}) \geq \frac{v}{n}$, maka

$$\int_{\Delta_{v,n}} \psi_n(x)dx - \int_{\Delta_{v,n}} \rho_n(x)dx = \int_{\Delta_{v,n}} \{\psi_n(x) - \rho_n(x)\}dx > \frac{1}{v} m(\Delta_{v,n}) \geq \frac{1}{n}$$

Kontradiksi dengan (1). Karena n adalah sebarang konstanta dan $m(\Delta_v) = 0$ maka $m(\Delta) = 0$ dan $\rho^* \geq \psi^*$. Tetapi $\rho^* \leq \psi^*$, oleh karena itu $\rho^* = \psi^* = f$ dan karena masing-masing dari fungsi ρ^* dan ψ^* terukur, maka fungsi f terukur.

$\Leftarrow$ Disisi lain asumsikan bahwa f adalah fungsi terukur pada E. Fungsi f terbatas oleh M, maka $-M \le f(x) \le M$, $\forall\ x \in E$.

Interval $[-M, M]$ dibagi menjadi $2n$ bagian yang sama sehingga diperoleh himpunan $E_k = \{ x \in E : \frac{M}{n} k \geq f(x) > \frac{M}{n}(k-1) \}$, $-n \le k \le n$.

Maka$\{ E_k : -n \le k \le n. \}$ adalah koleksi terhitung dari himpunan terukur yang saling asing sedemikian sehingga bahwa $E = \bigcup_{k=-n}^{n} E_k$. Oleh karena itu $m(E) = \sum_{k=-n}^{n} m(E_k)$.

Untuk setiap n, didefinisikan fungsi sederhana ψ_n dan ρ_n

$$\psi_n(x) = \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} k\chi_{E_k}(x) .$$

$$\rho_n(x) = \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} (k-1)\chi_{E_k}(x) .$$

Sehingga berlaku $\rho_n(x) \le f(x) \le \psi_n(x)$. Maka

$$\begin{cases} \inf\limits_{\psi > f} \int_E \psi(x)dx \le \int_E \psi_n(x)dx = \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} km(E_k) \\ \sup\limits_{\rho < f} \int_E \rho(x)dx \ge \int_E \rho_n(x)dx = \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} (k-1)m(E_k) \end{cases}$$

$$\inf_{\psi > f} \int_E \psi(x)dx = \sup_{\rho < f} \int_E \rho(x)dx \le \frac{m}{n} \sum_{k=-n}^{n} m(E_k) = \frac{M}{n} m(E)$$

Karena n sebarang diperoleh

$$0 \le \inf_{\psi > f} \int_E \psi(x)dx - \sup_{\rho < f} \int_E \rho(x)dx \le 0 .$$

Oleh karena itu f terintegral *Lebesgue* pada E.

B. Keterkaitan antara Integral Lebesgue dengan Integral Riemann

Teorema 3.4 (Gupta : 1976 : 136).

Misalkan f adalah fungsi terbatas yang didefinisikan pada $[a,b]$. Jika f terintegral Riemann pada $[a,b]$, maka f terintegral Lebesgue dan $R\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

Bukti :

Karena f terintegral Riemann pada [a,b], maka

$$\inf_{\psi_1 > f} \int_a^b \psi_1(x)dx = \sup_{\rho_1 < f} \int_a^b \rho_1(x)dx = R\int_a^b f(x)dx$$

ψ_1 dan ρ_1 adalah fungsi tangga yang didefinisikan pada [a,b]. Sedangkan setiap fungsi tangga adalah fungsi sederhana. Maka

$$\sup_{\rho_1 < f} \int_E \rho(x)dx \leq \sup_{\rho < f} \int_E \rho(x)dx .$$

$$\inf_{\phi_1 > f} \int_E \psi_1 (x)\, dx \geq \inf_{\phi > f} \int_E \psi (x)\, dx.$$

Dengan ψ dan ρ adalah fungsi sederhana yang didefinisikan pada [a,b], maka

$$R\int_a^b f(x)dx \leq \sup_{\rho < f} \int_E \rho(x)dx \leq \inf_{\phi > f} \int_E \psi (x)\, dx \leq R\int_a^b f(x)dx .$$

$$= \sup_{\rho < f} \int_E \rho(x)dx = \inf_{\phi > f} \int_E \psi (x)\, dx = R\int_a^b f(x)dx .$$

$$= \int_a^b f(x)dx = R\int_a^b f(x)dx .$$

Terbukti bahwa $\int_a^b f(x)dx = R\int_a^b f(x)dx$.

Jadi, setiap fungsi terbatas yang terintegral Riemann pasti terintegral Lebesgue. Tetapi, fungsi yang terintegral Lebesgue belum tentu terintegral Riemann.

Contoh :

Diberikan bahwa $f(x) = \begin{cases} 0 & jika \quad 0 \leq x < 1 \\ 2 & jika \quad \{1 \leq x < 2\} \cup \{3 \leq x < 4\} \\ 3 & jika \quad \{2 \leq x < 3\} \cup \{4 \leq x \leq 5\} \end{cases}$

Buktikan bahwa $f(x)$ terintegral Riemann dan terintegral Lebesgue.

Bukti :

Akan dibuktikan bahwa $f(x)$ terintegral Riemann.

Selang $[0,5]$ dipartisi menjadi n bagian yang sama, masing-masing dengan panjang $\Delta x = \frac{1}{n}$. Dalam tiap selang $[x_{i-1}, x_i]$ menggunakan $\bar{x}_i = x_i$ sebagai titik sampel. Maka

$x_0 = 0$

$x_1 = 0 + \Delta x = 0 + \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$

$x_2 = 0 + 2\Delta x = 0 + 2.\frac{1}{n} = \frac{2}{n}$

:

$x_i = 0 + i\Delta x = 0 + i.\frac{1}{n} = \frac{i}{n}$

:

$x_n = 0 + n.\Delta x = 0 + n.\frac{1}{n} = 1.$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} [0+2+3+2+3]\frac{1}{n}$$

$$= 10.\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1$$

$$= 10.\ \frac{1}{n}.n$$

$$= 10.$$

Karena P adalah suatu partisi tetap, $|P| - 0$ setara dengan $n - \propto$, maka

$$\int_0^5 f(x)dx = \lim_{|p|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i \;=\; \lim_{n\to\infty} 10 \;=\; 10.$$

Akan dibuktikan bahwa *f(x)* terintegral *Lebesgue*.

$$\int_0^5 f(x)dx = f(x_1).m([0,1)) + f(x_2).m([1,2)) + f(x_3).m([2,3)) + f(x_4).m([3,4))$$

$$+ \; f(x_5).m([4,5]).$$

$$= 0.1 + 2.1 + 3.1 + 2.1 + 3.1$$

$$= 10 \;.$$

Terbukti bahwa *f(x)* terintegral Riemann dan terintegral Lebesgue.

Contoh :

Diberikan f : $[0,2] - \Re$ dengan $f(x) = \begin{cases} 3 & jika \quad x \in rasional \\ 2 & jika \quad x \in irasional \end{cases}$

Buktikan bahwa *f(x)* terintegral Lebesgue tetapi tidak terintegral Riemann.

Penyelesaian :

Misalkan, himpunan bilangan rasional $= Q$ dan himpunan bilangan irasional = Q^c.

Fungsi f terukur dan terbatas pada $[0,2]$, maka f terintegral *Lebesgue*, yaitu

$$\int_0^2 f(x)dx = f(x_1).m(\,[0,2] \cap Q) + f(x_2).m\,(\,[0,2] \cap Q^c\,)$$

$$\int_0^2 f(x)dx \quad = 3.0 \;+\; 2.(\,2\text{-}0) \quad = 0 + 4 \;= 4.$$

Fungsi f tidak kontinu dan untuk setiap fungsi tangga $\psi \geq f$,

$$R\;\overline{\int_0^2}\; f(x)\,dx = \inf\int_0^2 \psi(x)dx = 3(2 - 0) = 6.$$

Untuk setiap fungsi tangga $\psi \leq f$. maka $R\underline{\int_0^2} f(x)dx = \sup \int_0^2 \psi(x)dx = 2(2 - 0) = 4$

Karena $R\overline{\int_0^2} f(x)dx \neq R\underline{\int_0^2} f(x)dx$ maka f tidak terintegral Riemann.

C. Sifat dari integral Lebesgue pada fungsi terukur terbatas

Teorema 3.5 (Gupta : 1976, 138)

Misalkan f dan g adalah fungsi terukur terbatas, terdefinisi pada himpunan berukuran berhingga E , maka:

a. $\int_E af = a\int_E f$, $\qquad \forall\ a \in \Re$

b. $\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g$.

c. Jika $f = g$ hampir dimana-mana, maka $\int_E f = \int_E g$

d. Jika $f \leq g$ hampir dimana-mana, maka $\int_E f \leq \int_E g$, oleh karena itu $|\int_E f| \leq \int_E |f|$

e. Jika $\alpha \leq f(x) \leq \beta$ maka $\alpha m(E) \leq \int_E f(x)dx \leq \beta m(E)$

f. Jika E_1 dan E_2 adalah subset terukur saling asing dari E maka:

$\int_{E_1 \cup E_2} f = \int_{E_1} f + \int_{E_2} f$

Bukti :

a). Jika $a = 0$ maka $\int_E af = a\int_E f$.

Asumsikan bahwa $a \neq 0$. Jika ψ adalah fungsi sederhana maka $a\,\psi$ juga fungsi sederhana, dan sebaliknya.

Untuk $a > 0$ maka $\int_E af = \inf_{a\psi > af} \int_E a\psi = a \inf_{\psi > f} \int_E \psi = a\int_E f$.

Untuk a < 0 maka $\int_E af = \inf_{a\psi > af} \int_E a\psi = a \sup_{\psi < f} \int_E \psi = a\int_E f$ (terbukti).

b). Jika ψ_1 dan ψ_2 adalah fungsi sederhana sedemikian sehingga $\psi_1 \geq f$ dan $\psi_2 \geq g$, maka $\psi_1 + \psi_2$ adalah fungsi sederhana dan $f + g \leq \psi_1 + \psi_2$. Sehingga

$$\int_E (f+g) \leq \int_E (\psi_1 + \psi_2) = \int_E \psi_1 + \int_E \psi_2$$

$$= \inf_{\psi_1 > f} \int_E \psi_1 + \inf_{\psi_2 > g} \int_E \psi_2$$

$$= \int_E f + \int_E g \ . \qquad (1)$$

Dengan cara yang sama jika ρ_1, ρ_2 adalah fungsi sederhana sedemikian sehingga $\rho_1 \leq f$ dan $\rho_2 \leq g$ maka $\rho_1 + \rho_2$ adalah fungsi sederhana dan $\rho_1 + \rho_2 \leq f + g$, sehingga

$$\int_E (f+g) \geq \int_E (\rho_1 + \rho_2) = \int_E \rho_1 + \int_E \rho_2$$

$$= \sup_{\rho_1 < f} \int_E \rho_1 + \sup_{\rho_2 < g} \int_E \rho_2$$

$$= \int_E f + \int_E g \ . \qquad (2)$$

Dari (1) dan (2) dapat disimpulkan $\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g$.

c). Karena $f = g$ hampir dimana-mana, maka $(f - g) = 0$.

Akan ditunjukkan bahwa $\int_E (f - g) = 0$.

ψ adalah fungsi sederhana sedemikian sehingga $\psi \geq (f - g)$ dan $f - g = 0$. Karena $f - g = 0$ hampir dimana-mana maka $\psi \geq 0$. Sesuai dengan teorema *3.5* (b), diperoleh

$$\int_E \psi \geq 0 .$$

$$\int_E (f - g) \geq 0 . \qquad (1)$$

Fungsi ρ adalah fungsi sederhana sedemikian sehingga $\rho \leq (f - g)$ dan $(f - g) = 0$ maka $\rho \leq 0$. Karena $\rho \leq 0$ maka

$$\int_E \rho \leq 0 .$$

$$\int_E (f - g) \leq 0 . \qquad (2)$$

Dari (1) dan (2) dapat disimpulkan bahwa $\int_E (f - g) = 0$, sehingga $\int_E f = \int_E g$.

d. Karena $f \leq g$ hampir dimana-mana maka $g - f \geq 0$. Diberikan fungsi sederhana ψ sedemikian sehingga $\psi \geq g - f$ maka $\psi \geq 0$.

$$\int_E \psi \geq 0 .$$

$$= \inf_{\Psi \geq g - f} \int_E \Psi \geq 0$$

$$= \int_E (g - f) \geq 0$$

$$= \int_E f \leq \int_E g .$$

Diberikan fungsi sederhana ρ sedemikian sehingga $\rho \geq f$. Fungsi f bernilai real dengan $f^+ = \max(f,0)$ dan $f^- = \max(-f, 0)$ sehingga $f = f^+ - f^-$ dan $|f| = f^+ + f^-$ sehingga

$$|\int_E f| = |\int_E (f^+ - f^-)| = |\int_E f^+ - \int_E f^-| \leq \int_E f^+ + \int_E f^-$$

$$= \int_E |f^+ + f^-|$$

$$= \int_E |f|$$

Terbukti bahwa $|\int_E f| \leq \int_E |f|$.

e. Jika $\alpha \leq f(x) \leq \beta$ maka

$$\int_E \alpha \, \mathrm{dx} \leq \int_E f(x) \, \mathrm{dx} \leq \int_E \beta \, \mathrm{dx}$$

$\Leftrightarrow \alpha \int_E 1 dx \leq \int_E f(x) \, \mathrm{dx} \leq \beta \int_E 1 dx$, karena $\int_E 1 dx = m(E)$ maka

$$\Leftrightarrow \alpha m(E) \leq \int_E f(x) dx \leq \beta m(E)$$

f. Karena $E_1 \cap E_2 \neq \phi$ maka $\chi_{E_1 \cup E_2} = \chi_{E_1} + \chi_{E_2}$, sehingga untuk $\psi \geq f$ dengan ψ adalah fungsi sederhana, sedemikian sehingga $\int_{E_1 \cup E_2} \psi = \int_{E_1} \psi + \int_{E_2} \psi$

$$\inf_{\Psi \geq f} \int_{E_1 \cup E_2} \Psi \leq \int_{E_1} \psi + \int_{E_2} \psi$$

$$\int_{E_1 \cup E_2} f \leq \int_{E_1} \psi + \int_{E_2} \psi$$

$$\int_{E_1 \cup E_2} f \leq \inf_{\psi \geq f} \int_{E_1} \psi + \inf_{\psi \geq f} \int_{E_2} \psi \quad = \int_{E_1} f + \int_{E2} f \qquad \text{(i)}$$

Jika ρ suatu fungsi sederhana dengan $\rho \geq f$ sedemikian sehingga $\int_{E_1 \cup E_2} \rho = \int_{E_1} \rho + \int_{E_2} \rho$ maka

$$\sup_{\rho \leq f} \int_{E_1 \cup E_2} \rho \geq \int_{E_1} \rho + \int_{E_2} \rho$$

$$\int_{E_1 \cup E_2} f \geq \int_{E_1} \rho + \int_{E_2} \rho$$

$$\int_{E_1 \cup E_2} f \geq \sup_{\rho \leq f} \int_{E_1} \rho + \sup_{\rho \leq f} \int_{E_2} \rho$$

$$= \int_{E_1} f + \int_{E2} f \qquad \text{(ii)}$$

Dari (i) dan (ii) dapat disimpulkan $\int_{E_1 \cup E_2} f = \int_{E_1} f + \int_{E_2} f$

Contoh :

Fungsi $f(x) = \begin{cases} 3 & jika \quad x \in \left[-1, \frac{1}{3}\right) \\ 6 & jika \quad x \in [\frac{1}{3}, 1] \end{cases}$ dan $g(x) = \begin{cases} 2 & jika \quad x \in \left[-1, \frac{1}{3}\right) \\ 1 & jika \quad x \in [\frac{1}{3}, 1] \end{cases}$

Hitunglah: a. $\int_{[-1,1]} 2f(x)dx$

b. $\int_{[-1,1]} 3g(x)dx$

c. $\int_{[-1,1]} (f(x) + g(x))dx$.

d. Karena *g(x)* ∶ *f(x),* tunjukkan bahwa $\int_{[-1,1]} g(x)dx \leq \int_{[-1,1]} f(x)dx$

Penyelesaian:

a. $\int_{[-1,1]} 2f(x)dx = 2\int_{[-1,1]} f(x)dx = 2\ [\ 3.\frac{4}{3} + 6.\frac{2}{3}\ ] = 2.(\ 4+4) = 2.\ 8 = 16.$

b. $\int_{[-1,1]} 3g(x)dx = 3\int_{[-1,1]} g(x)dx = 3\ [\ 2.\frac{4}{3} + 1.\frac{2}{3}\ ] = 3.\ (\frac{8}{3}+\frac{2}{3}) = 3.\frac{10}{3} = 10.$

c. $\int_{[0,1]} (f(x)+g(x))dx = \int_{[0,1]} f(x)dx + \int_{[0,1]} g(x)dx = [\ 3.\frac{4}{3} + 6.\frac{2}{3}\ ] + [\ 2.\frac{4}{3} + 1.\frac{2}{3}\ ]$

$= 8 + \frac{10}{3}$

$= \frac{34}{3}.$

d. $\int_{[-1,1]} g(x)dx = [\ 2.\frac{4}{3} + 1.\frac{2}{3}\ ] = \frac{10}{3}$

$\int_{[-1,1]} f(x)dx = [\ 3.\frac{4}{3} + 6.\frac{2}{3}\ ] = 8$

Terbukti $\int_{[-1,1]} g(x)dx \leq \int_{[-1,1]} f(x)dx$

Contoh :

Diketahui $h(x) = \begin{cases} 5 & jika \quad x = 0 \\ 6 & jika \quad x \in (0,1] \end{cases}$ dan $k(x) = \begin{cases} 3 & jika \quad x = 0 \\ 6 & jika \quad x \in (0,1] \end{cases}$

Tunjukkan bahwa $\int_{[0,1]} k(x)dx = \int_{[0,1]} h(x)dx$ hampir dimana-mana.

Penyelesaian :

a. Akan ditunjukkan bahwa $\int_{[0,1]} h(x)dx = \int_{[0,1]} k(x)dx$.

$$\int_{[0,1]} h(x)dx = (5.0 + 6.1) = 0 + 6 = 6.$$

$$\int_{[0,1]} k(x)dx = (3.0 + 6.1] = 0 + 6 = 6.$$

Terbukti bahwa $\int_{[0,1]} h(x)dx = \int_{[0,1]} k(x)dx$.

Corollary 3.1 (Gupta : 1976, 140)

Jika $f(x) \geq 0$ pada E, maka $\int_E f(x)dx \geq 0$ dan jika $f(x) \leq 0$ pada E maka $\int_E f(x)dx \leq 0$.

Bukti :

a. Akan ditunjukkan jika $f(x) \geq 0$ pada E, maka $\int_E f(x)dx \geq 0$

Misalkan $\psi(x)$ adalah fungsi sederhana sedemikian sehingga $\psi(x) \geq f(x) \geq 0$ maka $\psi(x) \geq 0$.

Sehingga $\int_E \psi(x)dx \geq 0$

$$\inf_{\psi > f} \int_E \psi(x)dx \geq 0$$

$$\int_E f(x)dx \geq 0.$$

Terbukti jika $f(x) \geq 0$ pada E, maka $\int_E f(x)dx \geq 0$.

b. Akan ditunjukkan jika $f(x) \leq 0$ pada E maka $\int_E f(x)dx \leq 0$.

$\rho(x)$ adalah fungsi sederhana sedemikian sehingga $\rho(x) \leq f(x)$ dan $f(x) \leq 0$ maka $\rho(x) \leq f(x) \leq 0$. Sehingga $\rho(x) \leq 0$ dan

$$\int_E \rho(x)dx \leq 0$$

$$\sup_{\rho<f} \int_E \rho(x)dx \leq 0$$

$$\int_E f(x)dx \leq 0.$$

Terbukti jika $f(x) \leq 0$ pada E maka $\int_E f(x)dx \leq 0$.

Corollary 3.2 (Gupta : 1976, 140).

Jika m(E) = 0 maka $\int_E f = 0$.

Bukti:

Jika ψ adalah fungsi sederhana yang terdefinisi pada E dan m(E) = 0 sedemikian sehingga $f \leq \psi = 0$ maka

$$\int_E \psi = 0$$

$$\inf_{\psi>f} \int_E \psi = 0$$

$$\int_E f = 0.$$

Corollary 3.3 (Gupta : 1976, 140)

Jika $f(x)$ = k hampir dimana-mana pada E maka $\int_E f = km(E)$.

Jika $f = 0$ hampir dimana-mana pada E maka $\int_E f = 0$.

Jika $f = 1$ hampir dimana-mana pada E maka $\int_E f = m(E)$.

Bukti :

a. Jika $\psi(x)$ adalah fungsi sederhana sedemikian sehingga $\psi(x) \geq f(x)$ dan $f(x)=k$ maka $\psi(x) \geq k$ Sehingga

$$\int_E \psi(x)dx \geq km(E)$$

$$\inf_{\psi > f} \int_E \psi(x)dx \geq km(E)$$

$$\int_E f(x)dx \geq km(E). \qquad (1)$$

$\rho(x)$ adalah fungsi sederhana sedemikian sehingga $\rho(x) \leq f(x)$ dan $f(x)=k$ maka $\rho \leq k$. Sehingga

$$\int_E \rho(x)dx \leq km(E)$$

$$\sup_{\rho < f} \int_E \rho(x)dx \leq km(E)$$

$$\int_E f(x)dx \leq km(E). \qquad (2)$$

Dari (1) dan (2) dapat disimpulkan $\int_E f(x)dx = k\,m(E)$.

b. Jika $\psi(x)$ adalah fungsi sederhana sedemikian sehingga $\psi(x) \geq f(x)$ dan *f(x)=0* maka $\psi(x) \geq 0$ Sehingga

$$\int_E \psi(x)dx \geq 0.m(E)$$

$$\inf_{\psi > f} \int_E \psi(x)dx \geq 0$$

$$\int_E f(x)dx \geq 0. \qquad \text{(i)}$$

$\rho(x)$ adalah fungsi sederhana sedemikian sehingga $\rho(x) \leq f(x)$ dan *f(x)=0* maka $\rho \leq 0$. Sehingga

$$\int_E \rho(x)dx \leq 0.m(E)$$

$$\sup_{\rho < f} \int_E \rho(x)dx \leq 0$$

$$\int_E f(x)dx \leq 0. \qquad \text{(ii)}$$

Dari (i) dan (ii) dapat disimpulkan bahwa $\int_E f(x)dx = 0$.

c. Jika $\psi(x)$ adalah fungsi sederhana sedemikian sehingga $\psi(x) \geq f(x)$ dan *f(x)=1* maka $\psi(x) \geq 1$. Sehingga

$$\int_E \psi(x)dx \geq 1.m(E)$$

$$\inf_{\psi > f} \int_E \psi(x)dx \geq m(E)$$

$$\int_E f(x)dx \geq m(E). \qquad (1)$$

$\rho(x)$ adalah fungsi sederhana sedemikian sehingga $\rho(x) \leq f(x)$ dan $f(x)=1$ maka $\rho \leq 1$. Sehingga

$$\int_E \rho(x)dx \leq 1.m(E)$$

$$\sup_{\rho<f} \int_E \rho(x)dx \leq m(E)$$

$$\int_E f(x)dx \leq m(E). \qquad (2)$$

Dari (1) dan (2) dapat disimpulkan $\int_E f(x)dx = m(E)$.

Teorema 3.6 (Gupta : 1976, 141)

Jika $\int_E f = 0$ dan $f(x) \geq 0$ pada E, maka $f = 0$ hampir dimana-mana.

Bukti :

$A \subset E$ adalah himpunan semua $x \in E$ dengan $f(x) > 0$, maka

$$A = \{x \in E : f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{m} \{x \in E : f(x) > \frac{1}{N}\}.$$

Akan dibuktikan bahwa $m(\{x \in E : f(x) > \frac{1}{N}\}) = 0$

Misalkan terdapat $N \in \mathbf{N}$, sehingga $m(\{x \in E : f(x) > \frac{1}{N}\}) = \lambda$ dengan $\lambda \neq 0$.

$$E_1 = \{x \in E : f(x) > \frac{1}{N}\}$$

$$E_2 = \{x \in E : f(x) \leq \frac{1}{N}\}$$

Kemudian E_1 dan E_2 dua himpunan terukur saling asing sedemikian sehingga

$E = E_1 \cup E_2$. Maka

$$\int_E f = \int_{E_1} f + \int_{E_2} f$$

Tetapi $\int_{E_1} f > \frac{1}{N} m(E_1) = \frac{\lambda}{N} > 0$.

Akibatnya jika $m(\{x \in E : f(x) > \frac{1}{N}\}) = \lambda$ dengan $\lambda \neq 0$ maka $\int_E f > 0$. kontradiksi, maka $\int_E f = 0$. Sehingga terbukti jika $\int_E f = 0$ dan $f(x) \geq 0$ pada E, maka $f = 0$ hampir dimana-mana.

D. Kekonvergenan Integral Lebesgue pada Fungsi Terbatas.

Teorema 3.7 *(Teorema kekonvergenan Terbatas)* (Gupta : 1976, 142).

Misalkan $(f_n\}$ adalah barisan fungsi terukur yang terdefinisi pada E. Himpunan E berukuran berhingga atau $m(E) < \propto$ .Terdapat bilangan real M sedemikian sehingga $| f_n(x)| \leq M$, untuk semua x dan semua n. Jika $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, untuk masing-masing $x \in E$, maka

$$\int_E f = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)$$

Bukti : fungsi f adalah limit dari barisan $\{f_n\}$ terukur pada E, maka f terukur. Karena f terukur maka f terintegral Lebesgue. Diberikan $\varepsilon > 0$, maka terdapat himpunan terukur $A \subset E$ dengan $m(A) < \frac{\varepsilon}{4M}$ dan bilangan bulat $N > 0$ sedemikian sehingga $| f_n(x) - f(x) | < \frac{\varepsilon}{2m(E)}$ pada $E - A$, untuk semua $n \geq N$.

Karena $|f_n(x)| \leq M, \quad \forall\, n \in N$ dan $x \in E$.

$\Leftrightarrow |f(x)| \leq M, \quad x \in E.$

$\Leftrightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x)| + |f(x)| \leq 2M$

$\Leftrightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq 2M, \quad x \in E$ dan $x \in A$.

Maka
$$\left|\int_E f_n - \int_E f\right| = \left|\int_E (f_n - f)\right|$$
$$\leq \int_E (f_n - f)$$
$$= \int_{E-A} |f_n - f| + \int_A |f_n - f|$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2m(E)} m(E - A) + 2M.\, m(A)$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + 4M\frac{\varepsilon}{2M}$$
$$= \varepsilon \qquad \forall\, n \geq N$$

Sehingga $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x) = \int_E f$.

Teorema 3.8 (Gupta : 1976 , 143)

Diberikan $\{f_n\}$ adalah barisan fungsi terukur yang terdefinisi pada E. Himpunan E berukuran berhingga atau $m(E) < \infty$, dengan $|f_n(x)| \leq M$ untuk semua n dan x pada E. Jika $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ hampir dimana-mana pada E, maka f terintegral dan $\int_E f = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n$.

Bukti :

Fungsi f adalah limit dari barisan $\{f_n\}$ hampir dimana-mana pada E.

$|f(x)| \leq M$ dan terukur pada E. Jika m(E) = 0 maka $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$.

Sehingga asumsikan bahwa m(E)>0 dan $\varepsilon > 0$, maka untuk setiap bilangan asli i

terdapat $E_i = \{x \in E : |f_j(x) - f(x)| \geq \dfrac{\varepsilon}{2m(E)}$, untuk beberapa $j \geq i\}$

Maka $\{E_i\}$ adalah barisan himpunan turun dengan $m(E_1) \leq m(E) < \infty$. Sehingga

$$\lim_{i \to \infty} m(E_i) = m \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i = 0 .$$

Ambil sebarang bilangan N besar sedemikian sehingga $m(E_N) < \dfrac{\varepsilon}{4M}$.

Misalkan $E_N = A$, maka $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2m(E)}$ pada $E - A$ untuk semua $n \geq N$.

Karena $|f_n(x)| \leq M, \quad \forall n \in N$ dan $x \in E$.

$\Leftrightarrow |f(x)| \leq M, \quad x \in$ E.

$\Leftrightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x)| + |f(x)| \leq 2M$

$\Leftrightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq 2M, \quad x \in E$ dan $x \in A$.

Maka

$$
\begin{aligned}
\left|\int_E f_n - \int_E f\right| &= \left|\int_E (f_n - f)\right| \\
&\leq \int_E (f_n - f) \\
&= \int_{E-A} |f_n - f| + \int_A |f_n - f| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2m(E)} m(E - A) + 2M.\, m(A) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + 4M \frac{\varepsilon}{2M}
\end{aligned}
$$

$= \varepsilon \quad \forall\, n \geq N$

Sehingga $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x) = \int_E f$.

Contoh :

Diberikan $\{r_i\}$ adalah enumerasi dari semua bilangan rasional pada $[0,2]$.

$S_n = \{r_i : i = 1, 2,.., n\}$, $n \in$ N.

Fungsi $f_n : [0,2] - \Re$, untuk setiap $n \in N$, didefinisikan dengan

$$f_n(x) = \begin{cases} 2 & , jika \quad x \in S_n \\ 0 & , jika \quad x \notin S_n \end{cases}$$

Barisan $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ hampir dimana-mana, maka hitunglah $\int_{[0,2]} f(x)dx$

Penyelesaian :

Diberikan $f(x) : [0,2] - \Re$. Barisan $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ hampir dimana-mana,

dengan $f(x) = \begin{cases} 2 & , jika \quad x \quad rasional \\ 0 & , jika \quad x \quad irrasional \end{cases}$.

Sehingga $f(x) = 0$ hampir dimana-mana, maka

$$\int_{[0,2]} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \lim_{n\to\infty} (2.m\,(S_n) + 0.\ m(A\text{-}S_n)),$$

$$= \lim_{n\to\infty} (2.0 + 0.2)$$

$$= \lim_{n\to\infty} 0$$

$$= 0.$$

Teorema 3.9 (Gupta : 1976, 143)

Misalkan $\{f_n\}$ adalah barisan dari fungsi yang terintegral Riemann terdefinisi pada $[a,b]$ sedemikian sehingga $|f_n(x)| \le M$, untuk semua n dan $x \in [a,b]$. Jika $\{f_n\}$ konvergen ke fungsi f (terintegral Riemann) yang didefinisikan pada $[a,b]$ maka

$$R\int_a^b f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} R\int_a^b f_n(x)dx \,.$$

Bukti :

Karena f_n terintegral Riemann maka $R\int_a^b f_n(x)dx = \mathcal{L}\int_a^b f_n(x)dx$ sehingga

$$\lim_{n\to\infty} R\int_a^b f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}\int_a^b f_n(x)dx$$

Karena f terintegral Riemann maka f juga terintegral Lebesgue yaitu

$$R\int_a^b f = \int_a^b f$$

$\{f_n\}$ adalah barisan fungsi terintegral Lebesgue dan $\{f_n\}$ konvergen ke suatu fungsi terintegral Lebesgue f maka menurut teorema *3.8* diperoleh

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \,.$$

Jadi, $R\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} R\int_a^b f_n(x)dx \,.$

BAB IV

PENUTUP

A. Kesimpulan

Dari uraian yang dikemukan dalam bab sebelumnya, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Misalkan f adalah fungsi sederhana dan terukur dengan representasi kanonik $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}$, $E_i = \{x \in E : f(x) = a_i\}$ saling asing dan terukur. Bilangan a_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) berbeda dan $a_i \neq 0$. Asumsikan bahwa E berukuran berhingga, maka integral *Lebesgue* dari f didefinisikan dengan

   $$\int f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} a_i m(E_i) .$$

   Selanjutnya integral *Lebesgue* dari f dapat ditulis $\int f$.

2. Misalkan f adalah fungsi terbatas, terdefinisi pada himpunan E yang berukuran berhingga. Fungsi f dikatakan terintegral *Lebesgue* pada E, jika $\mathcal{L}\overline{\int_E} f(x)dx = \mathcal{L}\underline{\int}_E f(x)dx$.

   Integral *Lebesgue* dari f pada E ditulis dengan $\mathcal{L}\int_E f(x)dx$ atau $\int_E f$.

3. Sifat-sifat dari integral *Lebesgue* pada fungsi terukur terbatas adalah sebagai berikut:

Misalkan f dan g adalah fungsi terukur terbatas, terdefinisi pada himpunan berukuran berhingga E , maka

a. $\int_E af = a\int_E f$, $\quad \forall \; a \in \Re$

b. $\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g$.

c. Jika $f = g$ hampir dimana-mana, maka $\int_E f = \int_E g$

d. Jika $f \leq g$ hampir dimana-mana, maka $\int_E f \leq \int_E g$, oleh karena itu

$|\int_E f| \leq \int_E |f|$

e. Jika $\alpha \leq f(x) \leq \beta$ maka $\alpha m(E) \leq \int_E f(x)dx \leq \beta m(E)$

f. Jika E_1 dan E_2 adalah subset terukur saling asing dari E maka:

$\int_{E_1 \cup E_2} f = \int_{E_1} f + \int_{E_2} f$.

3. Misalkan (f_n} adalah barisan fungsi terukur yang terdefinisi pada E yang berukuran berhingga. Terdapat bilangan real M sedemikian sehingga $|f_n(x)| \leq M$, untuk semua x dan semua n. Jika barisan {f_n} konvergen ke fungsi f maka $\int_E f_n(x)\,dx$ konvergen ke $\int_E f(x)dx$.

   Atau, dengan kata lain jika $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ untuk masing-masing $x \in E$, maka $\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx$.

B. Saran

Penulisan skripsi ini hanya membahas mengenai integral Lebesgue pada fungsi terbatas beserta sifat-sifatnya. Karena keterbatasan pengetahuan penulis, pembaca yang berminat dapat melanjutkan penulisan tentang integral Lebesgue pada fungsi terukur nonnegatif maupun integral Lebesgue umum.

DAFTAR PUSTAKA

Bartle, R.G. & R. Serbert, Donald. (2000). *Introduction to Real analysis*. 3^{rd}.ed. New York : John Willey and Sons, Inc.

Gaskill, H. S. & Narayanaswami, P. P. (1998). *Element of Real Analysis*. United States of America: Prentice-Hall, Inc.

Gupta. (1976). *Lebesgue Measure and Integration*. New Delhi: Willey Eastern Limited.

Royden, H. L. (1963). *Real Analysis*. New York: The Macmillan Company.

Sukirman. (2006). *Logika dan Himpunan*. Yogyakarta: Hanggar Kreator.

Purcel, E. J. & Dale Varberg. (2001). *Kalkulus*, alih bahasa I Nyoman Susila. Edisi ke-7. Batam : Interaksa.

.